

**TRABALHO DE GRADUAÇÃO**

**MODELO DE EXPANSÃO ADAPTATIVO DE  
REDES DE TRANSMISSÃO UTILIZANDO  
OTIMIZAÇÃO ROBUSTA**

**Alex Pires Soraggi**

Brasília, 06 de julho de 2017

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
ENE – Departamento de Engenharia Elétrica

## TRABALHO DE GRADUAÇÃO

# MODELO DE EXPANSÃO ADAPTATIVO DE REDES DE TRANSMISSÃO UTILIZANDO OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

**Alex Pires Soraggi**

RELATÓRIO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO REQUISITO  
PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO ELETRICISTA

**Aprovada por**

---

Prof. D. Sc. Pablo Eduardo Cuervo Franco, UnB/ENE  
*Orientador*

---

Prof. D. Maria Amélia Biagio, UnB  
*Examinador interno*

---

Prof. D. João Odilon Freitas Silva  
*Examinador externo*

Brasília, 06 de julho de 2017

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

SORAGGI, ALEX

Modelo de Expansão Adaptativo de Redes de Transmissão Utilizando Otimização Robusta. [Distrito Federal] 2017

X, 68, 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Engenharia Elétrica).

Monografia de Graduação – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia Departamento de Engenharia Elétrica

– Planejamento de Expansão Adaptativo de Redes de Transmissão

– Otimização Robusta

ENE/FT/UNB

Título (Série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

SORAGGI, A. P. (2017). Modelo de Expansão Adaptativo de Redes de Transmissão Utilizando Otimização Robusta, Relatório de Graduação em Engenharia Elétrica, publicação XXXXXX, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, DF, 68.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Alex Pires Soraggi

TÍTULO: Modelo de Expansão Adaptativo de Redes de Transmissão Utilizando Otimização Robusta.

GRAU: Engenheiro Eletricista

ANO: 2017

É permitida à Universidade de Brasília a reprodução desta monografia de graduação e o empréstimo ou venda de tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia pode ser reproduzida sem autorização escrita de autor.

---

Alex Pires Soraggi

UnB – Universidade de Brasília  
Campus Universitário Darcy Ribeiro  
FT – Faculdade de Tecnologia  
ENE – Departamento de Engenharia Elétrica  
Brasília – DF – 70919-970  
Brasil

*Dedico este trabalho aos meus pais e à  
minha irmã, que sempre me apoiaram  
independentemente da situação.*

*Alex Pires Soraggi*

## **Agradecimentos**

Meus sinceros agradecimentos:

Aos meus pais, por me darem todo o suporte necessário para que eu alcançasse os meus objetivos.

Ao professor Pablo Cuervo, pela confiança, todo o conhecimento compartilhado e todas as reuniões.

Aos meus amigos, por estarem ao meu lado nos melhores e piores momentos.

Alex Pires Soraggi

## RESUMO

Este trabalho desenvolve um modelo de expansão de redes de transmissão utilizando otimização robusta. Mais especificamente, utiliza a ferramenta computacional *GAMS* para obter soluções robustas do planejamento de linhas de transmissão, levando em consideração a incerteza do crescimento da demanda ao longo do tempo. Para solucionar o problema de otimização, é necessário utilizar uma abordagem de decomposição que faz uso de um equivalente *dual* do problema. Por causa da variável incerta, existe um termo não linear no modelo matemático, por isso, são utilizados dois níveis de decomposição de Benders no algoritmo do modelo para obter a solução que indique a maneira mais viável de se adicionar novas linhas de transmissão para um cenário de incerteza da previsão da carga.

Palavras chave: transmissão, expansão, otimização robusta, Benders, dual, horizonte de tempo.

## **ABSTRACT**

This paper develops a multistage transmission expansion model using robust optimization. More specifically, it utilizes the computer tool GAMS to obtain robust solutions of expansion planning. The model takes into account the load growth uncertainty and to solve the optimization problem is necessary to use a decomposition approach that make use of dual equivalent sub-problems. Because in the mathematical decomposition process bilinear terms appear, it is necessary to perform a second decomposition process. The algorithm makes use of the Benders technique to perform the two levels of decomposition. The results show that the model obtains low cost solutions indicating when and where additional capacity is required.

Keywords: transmission, expansion, robust optimization, Benders, dual, multistage.

## Sumário

1. INTRODUÇÃO .....	14
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO.....	14
1.2 MOTIVAÇÃO .....	14
1.3 OBJETIVOS .....	15
1.4 JUSTIFICATIVA .....	15
1.5 CONTRIBUIÇÃO .....	16
1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	16
2. REVISÃO CONCEITUAL.....	17
2.1 MODELO DETERMINÍSTICO DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO MULTISTÁGIO .....	18
2.2 MODELO ESTOCÁSTICO .....	21
2.3 DESVANTAGENS.....	23
2.4 TEORIA DA DUALIDADE.....	24
2.5 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS .....	25
2.6 FERRAMENTA COMPUTACIONAL <i>GAMS</i> .....	26
2.7 FERRAMENTA COMPUTACIONAL <i>MATLAB</i> .....	27
3. MODELO ROBUSTO INCLUINDO A INCERTEZA DA EVOLUÇÃO DA CARGA....	28
3.1 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS .....	28
3.2 TRATAMENTO DA INCERTEZA .....	30
3.3 MODELO ROBUSTO 2 ESTÁGIOS .....	31
3.4 MÉTODO DE SOLUÇÃO DO MODELO ROBUSTO.....	32
4. TESTES E RESULTADOS .....	36
4.1 SISTEMA GARVER.....	36
4.2 <i>PRIMAL</i> E <i>DUAL</i> .....	37



4.3 SISTEMA GARVER 6 BARRAS .....	38
4.4 SISTEMA 14 BARRAS IEEE.....	43
5. CONCLUSÃO .....	47
5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	48
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	49
7. APÊNDICE.....	50
APÊNDICE A. DADOS DO SISTEMA GARVER E IEEE-14 .....	50
APÊNDICE B. IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES .....	52
APÊNDICE C. CÓDIGO COMPUTACIONAL.....	57

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1- Sistema de 3 barras.....	29
Figura 2 - Fluxograma da decomposição de Benders.....	35
Figura 3 - Sistema Garver 6 barras .....	36
Figura 4 - Custos do sistema x Desvio.....	43
Figura 5 - Sistema IEEE-14. Fonte: Afonso, 2008. ....	44

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Custo de operação para os casos <i>primal</i> e <i>dual</i> .....	37
Tabela 4.2 - Vetor de Geração Caso <i>Primal</i> e Caso <i>Dual</i> .....	37
Tabela 4.3 - Resultados de Fluxo de Carga .....	38
Tabela 4.4 – Sistema Garver. Valores de demanda (MW) em cada barra para $\Delta^t = 0$ .....	39
Tabela 4.5 - Sistema Garver. Circuitos adicionados em cada linha para $\Delta^t = 0$ .....	39
Tabela 4.6 - Iterações e custo total (\$ x 10 <sup>6</sup> ) do sistema Garver para $\Delta^t = 0$ .....	39
Tabela 4.7 - Sistema Garver. Valores de demanda calculada (MW) em cada barra considerando o desvio $\hat{d}_k^t$ , para $\Delta^t = 1$ .....	40
Tabela 4.8 - Sistema Garver. Circuitos adicionados em cada linha para $\Delta^t = 1$ .....	41
Tabela 4.9 - Iterações e custo total (\$ x 10 <sup>6</sup> ) do sistema Garver para $\Delta^t = 1$ .....	41
Tabela 4.10 - Custos do sistema Garver (\$ x 10 <sup>6</sup> ) para diferentes valores de $\Delta^t$ .....	42
Tabela 4.11 - Sistema IEEE-14, $\Delta^t = 0$ e $\hat{d}_k^t = 0,1\bar{d}_k^t$ .....	44
Tabela 4.12 – Sistema IEEE-14. Circuitos adicionados em cada linha e custos para cada caso de geração. $\Delta^t = 1$ e $\hat{d}_k^t = 0,1\bar{d}_k^t$ .....	45
Tabela 4.13 - Custos do sistema IEEE-14 (\$ x 10 <sup>6</sup> ) para diferentes valores de $\Delta^t$ .....	46
Tabela A.1 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema Garver de 6 barras. ....	50
Tabela A.2 - Parâmetros referentes às barras do sistema Garver de 6 barras .....	50
Tabela A.3 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema IEEE-14.....	51
Tabela A.4 - Parâmetros referentes às barras do sistema IEEE-14.....	51
Tabela A.5 Geração máxima $\bar{G}_k$ nas barras 3 ou 9 quando se adiciona uma terceira unidade geradora ao sistema IEEE-14.....	52

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\perp$  Símbolo que indica que o valor marginal da equação é equivalente à variável indicada.

## Conjuntos

$T$	Conjunto de todos os estágios de tempo $t$ ;
$\Omega_B$	Conjunto de todas as barras;
$\Omega_d$	Conjunto de barras em que a demanda é considerada incerta;
$\Omega_R$	Conjunto de todos os ramos;
$\Omega_y$	Conjunto de todos os circuitos de cada ramo;
$\Phi$	Conjunto de todos os cenários.

## Parâmetros

$S_0$	Matriz de incidência no caso base;
$S$	Matriz de incidência das linhas candidatas;
$n_{0km}^t$	Número de circuitos por ramo no caso base;
$\overline{n_{km}^t}$	Número máximo de circuitos que podem ser adicionados por ramo em cada tempo;
$b_{0km}$	Susceptância da linha do ramo km no caso base;
$b_{km,y}$	Susceptância do circuito y do ramo km;
$Ci_{km}^t$	Custo de investimento para construção da linha do ramo km no tempo t;
$\bar{f}_{0km}$	Fluxo de potência máximo na linha do ramo km no caso base;
$\bar{f}_{km}$	Fluxo de potência máximo na linha candidata do ramo km;
$\bar{G}_k$	Máxima geração na barra k;
$\bar{\theta}_k$	Máximo ângulo de tensão na barra k;
$\bar{R}_k$	Máximo corte de carga na barra k;
$c^T$	Vetor de parâmetros referente às variáveis binárias;
$b^T$	Vetor de parâmetros referente às variáveis contínuas;
$\Delta^t$	Máximo desvio permitido no estágio de tempo t;
$\bar{d}_k$	Valor de demanda nominal na barra k;

$\hat{d}_k$  Valor de desvio de demanda na barra k;

### Variáveis Contínuas

$f_{0_{km}}^t$	Fluxo de potência no caso base do ramo km no tempo t;
$f_{km,y}^t$	Fluxo de potência do circuito y do ramo km no tempo t das linhas candidatas;
$\theta_k^t$	Ângulo de tensão da barra k no tempo t;
$f_{0_{km,s}}^t$	Fluxo de potência no caso base do ramo km no tempo t do cenário s;
$f_{km,y,s}^t$	Fluxo de potência do circuito y do ramo km no tempo t do cenário s das linhas candidatas;
$\theta_{k,s}^t$	Ângulo de tensão da barra k no tempo t do cenário s;
$n_{km}^t$	Número de circuitos adicionados em cada ramo no tempo t;
$G_k^t$	Geração na barra k no tempo t;
$R_k^t$	Corte de carga na barra k no tempo t;
$G_{k,s}^t$	Geração na barra k no tempo t do cenário s;
$R_{k,s}^t$	Corte de carga na barra k no tempo t do cenário s;
$y$	Vetor composto pelas variáveis contínuas;
$\alpha$	Variável de corte do modelo de otimização robusta;
$\varphi^T$	Variável dual referente às restrições compostas apenas por variáveis contínuas;
$\lambda^T$	Variável dual referente às restrições compostas apenas por variáveis contínuas e binárias;
$\eta^T$	Variável dual referente à restrição que apresenta o termo incerto
$d_k^t$	Demanda calculada.

### Variáveis binárias

$w_{km,y}^t$	Variável binária de instalação do circuito y da linha de transmissão no ramo km no tempo t;
$u_{km,y}^t$	Variável binária de utilização do circuito y da linha do ramo km no tempo t;
$x$	Vetor composto pelas variáveis binárias;

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A demanda por energia elétrica está aumentando significativamente. Em 1879, Thomas Edison inventou a lâmpada incandescente comercializável e, alguns anos depois, inaugurou a *Pearl Street Station*, em Nova Iorque. A *Pearl Street Station* era uma pequena unidade geradora capaz de fornecer energia elétrica para 59 clientes. A partir desse ponto, os avanços na capacidade de transmissão, geração e as invenções tecnológicas fizeram com que a demanda por energia elétrica crescesse exponencialmente.

Atualmente, a grande quantidade de equipamentos dependentes de energia elétrica nos domicílios e a enorme demanda requerida pelo setor industrial mostram como é fundamental ter um sistema confiável de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. No Brasil, cabe ao Ministério de Minas e Energia (MME), junto com outras instituições que compõem o setor elétrico, definir as diretrizes e o planejamento da expansão do sistema elétrico de potência.

Para realiza-lo de forma eficiente, a minimização dos custos é fundamental. Ademais, embora existam diversos estudos que preveem qual será a demanda no futuro, é impossível definir com precisão essa demanda. Portanto, o uso de ferramentas para auxiliar na tomada de decisão da expansão do sistema é de vital importância.

Sendo assim, ferramentas computacionais e modelos matemáticos auxiliam o planejamento, garantindo que o projeto tenha o menor custo possível e, ao mesmo tempo, forneça energia de maneira confiável.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

Há um grande interesse no estudo de técnicas que ajudem a planejar a expansão de sistemas de potência. Atualmente, o Brasil vive uma crise financeira. Logo, é mais importante ainda que se crie um projeto economicamente viável. Dessa forma, um plano de expansão de linhas de transmissão deve garantir, ao mesmo tempo, que o sistema seja capaz de suportar a carga requerida e que o investimento tenha o menor custo possível.

A partir dos modelos matemáticos, é possível calcular qual será o custo do investimento, quanto uma unidade deve gerar de energia, quantas linhas de transmissão novas devem ser

adicionadas ao sistema, se haverá corte de carga, os custos de operação e diversas outras informações. Portanto, existem diversos enfoques de estudos relacionados a esse tema. Para o presente caso, será dado enfoque na incerteza da demanda em diferentes estágios de tempo e a criação de um modelo matemático que defina a melhor solução para expandir um sistema de transmissão, dado o problema dessa incerteza.

### **1.3 OBJETIVOS**

Os objetivos deste trabalho são:

1. Propor uma formulação matricial para o modelo determinístico de expansão de redes de transmissão;
2. A partir desse modelo, reescrever parte do problema na forma dual;
3. Através da decomposição de Benders, resolver o problema de expansão de redes de transmissão do sistema Garver de 6 barras, visando a minimização do custo de investimento e do custo de operação.
4. Analisar como o modelo desenvolvido se comporta num sistema maior de 14 barras padrão IEEE.

### **1.4 JUSTIFICATIVA**

Os estudos sobre planejamento de redes de transmissão são muito importantes para garantir a continuidade do fornecimento de energia elétrica no futuro. Embora existam diversas pesquisas sobre o assunto, elas nem sempre levam em consideração a dificuldade em prever com exatidão a demanda futura, pois a variabilidade da geração eólica e solar, fontes que estão em franca evolução no mundo, além da expansão da geração distribuída, acentua de forma significativa a incerteza da demanda. Adicionalmente, provocam o deslocamento da geração das fontes tradicionais, impactando diretamente o uso da rede de transmissão. Dessa forma, este trabalho tem grande relevância para os estudos na área de expansão de redes de transmissão.

Os modelos estocásticos e determinísticos (Gondim, 2016) podem gerar um esforço computacional muito grande, caso o número de variáveis do sistema seja alto. Uma das desvantagens desses modelos é justamente o aumento do número de variáveis do programa quando é preciso analisar uma rede de transmissão de maior porte. Esse problema é

intensificado para o modelo estocástico, pois a quantidade de variáveis aumenta ainda mais quando se utiliza um número maior de cenários possíveis para o problema.

O modelo de otimização robusta utiliza matrizes na sua formulação, o que diminui consideravelmente o número de equações e variáveis do modelo, diminuindo, então, o esforço computacional para solucionar o problema. Ademais, o modelo robusto favorece o tratamento da incerteza da demanda, diferentemente dos modelos determinísticos e estocásticos, que consideram casos fixos de demanda – o que não protege eficientemente o sistema contra aumentos não previstos na carga, ou aumenta significativamente o esforço computacional (para o caso estocástico), pois requer que considere muitos cenários de demanda no modelo.

## **1.5 CONTRIBUIÇÃO**

Este trabalho utiliza a otimização robusta para resolver problemas de expansão de redes de transmissão em mais de um estágio de tempo.

Utilizando a decomposição de Benders para solucionar o problema, o modelo robusto corrige algumas desvantagens dos modelos estocásticos e determinísticos, como a redução do número de variáveis do problema, se comparado com o modelo estocástico e utilizar um espectro contínuo de valores de demanda ao invés do espectro discreto utilizado pelos outros dois modelos.

## **1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

O capítulo 2 apresenta uma fundamentação teórica do planejamento da expansão de redes de transmissão. São apresentados os modelos estocástico e determinístico, que serviram como base para o desenvolvimento do modelo robusto e também é explicado a técnica de decomposição de Benders, utilizada para resolver esse modelo.

O capítulo 3 apresenta o modelo robusto e as suas principais características, como a formulação matricial e o algoritmo utilizado para resolver o problema.

No capítulo 4 estão os testes e resultados do modelo robusto para solucionar o problema nos sistemas Garver 6 barras e IEEE-14.



## 2. REVISÃO CONCEITUAL

O planejamento da expansão de redes de transmissão é crucial para garantir que uma região receberá energia elétrica de forma confiável, sem ter riscos de falta de energia ou evitar que uma linha de transmissão ficará sobrecarregada, evitando, assim, diversos problemas no futuro. Dessa forma, o projeto deve informar quantas linhas de transmissão novas devem ser construídas e qual caminho elas devem percorrer.

Além de definir quantas linhas de transmissão devem ser adicionadas, alguns critérios devem ser levados em conta ao planejar a expansão de redes de transmissão, como o custo mínimo de investimento possível para a adição desses circuitos, o custo de operação da linha de transmissão, quantas unidades geradoras são necessárias, a demanda necessária, limitações no orçamento, restrições técnicas (limite de fluxo de potência, limites de geração de energia, diferença angular, etc.) e horizonte de tempo em que esse investimento deve ser feito. Caso o investimento seja feito tardiamente, pode ocorrer cortes de cargas e caso ele seja feito de maneira antecipada, o recurso financeiro não estará sendo utilizado da melhor maneira possível.

O horizonte de tempo em que a adição das linhas de transmissão é feita pode ser estático, ou seja, existe apenas um estágio de tempo e toda a expansão da rede é feita de uma só vez, ou ele pode ser dinâmico, nesse caso o projeto é dividido em vários estágios de tempo e o modelo proposto define quando e onde serão adicionadas novas linhas de transmissão. O modelo dinâmico é muito útil, pois, na maioria das vezes, existe uma limitação no orçamento e, com isso, permite-se que a expansão da rede seja feita em várias etapas, favorecendo, assim, a melhor utilização dos recursos financeiros. A desvantagem do modelo dinâmico é que aumenta a quantidade de variáveis do sistema e o número de restrições do modelo.

Algumas dificuldades existentes ao se criar o modelo são em relação às incertezas de alguns fatores no futuro. Fatores como a inflação e a situação econômica do país dificultam a precisão do custo de investimento das linhas de transmissão. A incerteza da demanda é outro ponto a ser considerado, pois não é possível afirmar que a demanda para determinado horizonte de tempo será maior ou menor do que a prevista. Dessa forma, alguns fatores como os custos de instalação levam em consideração a previsão e os modelos não podem dar uma garantia de que esse valor estará 100% correto. Já a demanda, devido também à dificuldade em prever seu valor exato no futuro, exige que o sistema planejado suporte possíveis variações em relação ao valor previsto.

Existem diversos modelos para tratar a incerteza da demanda no planejamento multiestágios de expansão de rede de transmissão. Alguns desses modelos que são mostrados neste trabalho são o determinístico, o estocástico e o robusto.

O modelo determinístico considera que todos os parâmetros de entrada são conhecidos. Logo, a demanda para esse modelo é fixa, não havendo então a possibilidade de existir outro cenário com valores diferentes de demanda. Apesar de ser um modelo mais simples e que tem, portanto, uma solução mais fácil em termos computacionais, o fato da demanda ser fixa é uma grande desvantagem.

O modelo estocástico tenta corrigir a falha existente no modelo determinístico, considerando cenários com valores de demandas possíveis e as suas probabilidades de ocorrência. Isso lhe garante maior proteção quanto à incerteza da demanda em relação ao modelo determinístico.

O modelo robusto considera que a demanda não é conhecida e que o valor dessa demanda pode variar em relação a uma média prevista. Logo, tem uma proteção maior contra possíveis variações na carga prevista e é, nesse aspecto, melhor do que os outros dois modelos.

Neste capítulo, apresentaremos o modelo determinístico e o estocástico. O modelo robusto será explicado separadamente no próximo capítulo.

## 2.1 MODELO DETERMINÍSTICO DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO MULTISTÁGIO

O planejamento determinístico de expansão de redes de transmissão considera apenas uma possibilidade de demanda, desse modo, a demanda é um parâmetro de entrada declarado.

O modelo proposto por Gondim (2016) utiliza programação linear, binária e mista e é apresentado em (1):

$$\min_{w,G,R} \sum_{t \in T} \left[ \lambda i^t \sum_{km \in \Omega_R} C i_{km}^t \sum_{v \in \Omega_v} w_{km,y}^t + \lambda v^t \sum_{k \in \Omega_B} (C g_k G_k^t + C l s_k R_k^t) \right] \quad (1a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{t \in T} \sum_{km \in \Omega} C i_{km}^t \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t \leq C_{total} \quad \forall km \in \Omega_R, \forall t \in T, \quad (1b)$$

$$\forall y \in \Omega_y$$

$$\sum_{km \in \Omega_R} S_0 f_{0km,y}^t + \sum_{k \in \Omega_B} S \sum_{y=1}^{\overline{n}_{km}^t} f_{km,y}^t = G_k^t + R_k^t - D_k^t \quad \forall km \in \Omega_R, \forall k \in \Omega_B, \quad (1c)$$

$$\forall t \in T, \forall y \in \Omega_y$$

$$f_{0km,y}^t = -b_{0km} n_{0km,y} (\theta_k^t - \theta_m^t) \quad \forall km \in \Omega_R, \forall t \in T \quad (1d)$$

$$-M(1 - u_{km,y}^t) \leq \frac{f_{km,y}^t}{b_{km,y}} + (\theta_k^t - \theta_m^t) \leq M(1 - u_{km,y}^t) \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (1e)$$

$$-n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \leq f_{0km,y}^t \leq n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \quad \forall km \in \Omega_R, \forall t \in T \quad (1f)$$

$$-u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \leq f_{km,y}^t \leq u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (1g)$$

$$-\bar{\theta} \leq \theta_k^t \leq \bar{\theta} \quad \forall k \in \Omega_B, \forall t \in T \quad (1h)$$

$$0 \leq G_k^t \leq \bar{G} \quad \forall k \in \Omega_B, \forall t \in T \quad (1i)$$

$$0 \leq R_k^t \leq \bar{R} \quad \forall k \in \Omega_B, \forall t \in T \quad (1j)$$

$$u_{km,y}^t = w_{km,y}^t + w_{km,y}^{t-1} + w_{km,y}^{t-2} + \dots + w_{km,y}^{t-m} \quad \forall km \in \Omega_R, m \in (T-1), \quad (1k)$$

$$u_{km,y}^t \leq u_{km,y}^{t+1} \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (1l)$$

$$\sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t \leq \bar{n}_{km}^t \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (1m)$$

$$\sum_{t \in T} w_{km,y}^t \leq 1 \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (1n)$$

$$\theta_k^t = 0 \quad \forall k \in \Omega_B | k = ref, t \in T \quad (1o)$$

$$u_{km,y}^t, w_{km,y}^t \text{ variáveis binárias} \quad \forall km \in \Omega_R, \forall k \in \Omega_B, \quad (1p)$$

$$G_k^t, R_k^t, \theta_k^t, f_{0km,y}^t, f_{km,y}^t \text{ variáveis contínuas} \quad \forall t \in T, \forall y \in \Omega_y$$

Em que:

$T$  é o conjunto de todos os estágios de tempo;

$\Omega_B$  é o conjunto de todas as barras do sistema;

$\Omega_R$  é o conjunto de todos os ramos do sistema;

$\Omega_y$  é o conjunto de todos os circuitos de cada ramo.

A função objetivo (1a) é separada em duas partes. A primeira se refere aos custos de investimento, ou seja, está ligada à construção de novas linhas de transmissão, em que  $Ci_{km}^t$  é o custo para construir uma nova linha de transmissão no ramo  $km$  no estágio de tempo  $t$ .  $w_{km,y}^t$  é a variável binária de instalação de linhas candidatas do sistema. Caso  $w_{km,y}^t = 1$ , a solução diz que deve ser adicionado um novo circuito  $y$ , no ramo  $km$ , no estágio de tempo  $t$ . Caso  $w_{km,y}^t = 0$ , um novo circuito não deve ser adicionado. A segunda parte da função objetivo diz respeito aos custos operacionais do sistema.  $Cg_k$  e  $Cl_s_k$  referem-se aos custos de geração do sistema em cada barra e aos custos de corte de carga em cada barra  $k$  respectivamente. As

variáveis  $G_k^t$  e  $R_k^t$  indicam a geração de energia e o corte de carga em cada barra do sistema. É importante lembrar que só ocorrerá corte de carga caso o sistema não consiga fornecer toda a carga demandada e que os custos de corte de carga, caso ocorram, serão bem elevados. Os termos  $\lambda i^t$  e  $\lambda v^t$  são os índices de correção de custos e transformam os valores dos custos no futuro em valores presentes. Isto é necessário, já que o modelo proposto é multiestágios e considera um horizonte de investimento a longo prazo. Esses índices de correção, segundo Escobar (2008), são calculados com base na taxa de juros.

A restrição (1b) é o limite de orçamento. O custo de investimento para cada ramo não pode ultrapassar o custo total estipulado para a obra.

A restrição (1c) é a primeira lei de Kirchhoff. O somatório dos fluxos de potência dos circuitos já existentes  $f_{0_{km},y}^t$  mais o somatório do fluxo de potência dos circuitos adicionados  $f_{km,y}^t$  deve ser igual à soma da geração total mais o corte de carga decrescido da demanda.  $S_0$  e  $S$  são as matrizes de incidência do caso base e dos circuitos candidatos, respectivamente.

As equações de fluxo de potência estão representadas pelas equações (1d) e (1e). A primeira é a equação de fluxo de potência para o caso base e a segunda é a equação para as linhas candidatas. Essas equações relacionam a susceptância  $b_{0_{km}}$  e  $b_{km,y}$  com a diferença angular das barras. Vale ressaltar que na equação (1e) utiliza-se variáveis binárias para tornar o problema linear, onde  $M$  é um valor grande o suficiente, porém menor do que  $2\bar{\theta}$ , como mostrado por Vinasco (2011). Quando  $u_{km,y}^t = 1$  a equação fica similar a equação (1d). Caso  $u_{km,y}^t = 0$  pela equação (1g), o fluxo será zero e, assim, a equação (1e) ficará apenas em função dos ângulos, que serão limitados por  $M$ .

As equações (1f) e (1g) são as limitações dos fluxos de potência do caso base e das linhas candidatas respectivamente. Já (1h), (1i) e (1j) limitam o valor do ângulo, valor máximo de geração e valor máximo de corte de carga respectivamente.

As restrições das variáveis binárias foram definidas em (1k), (1l), (1m). Em (1k) e (1l) temos a variável binária de utilização dos circuitos instalados  $u_{km,y}^t$ . Esta variável força a utilização do circuito sempre que uma nova linha for instalada. Caso  $u_{km,y}^t = 1$ , a variável permanecerá 1 em todos os estágios de tempo seguintes para garantir que o circuito continuará sendo utilizado. A variável  $w_{km,y}^t$  indica apenas o momento em que o circuito foi adicionado, logo, só será 1 no estágio de tempo em que há a instalação. A restrição (1m) limita o número máximo de circuitos que podem ser instalados em cada ramo. A restrição (1n) evita que o

investimento seja adicionado mais de uma vez e, por último, a restrição (1o) determina que a barra 1 do sistema seja o ângulo fase de referência.

## 2.2 MODELO ESTOCÁSTICO

O modelo estocástico é similar ao modelo determinístico. Sua diferença está na segunda parte da função objetivo (2a), referente ao custo de operação do sistema. No caso estocástico, o custo operativo é multiplicado pela probabilidade de cada cenário. Dessarte, para cada cenário de demanda, haverá valores distintos de geração, corte de carga, fluxo de potência e ângulo de fase. Entretanto, é importante ressaltar que, independentemente do número de cenários possíveis, a solução do problema indicará apenas um plano de expansão. Sendo assim, caso exista um cenário com uma demanda muito adversa, porém sua probabilidade de ocorrência seja baixa, a solução do problema indicará que, em vez de construir mais linhas de transmissão e aumentar, assim, o custo do investimento, seria melhor que houvesse corte de carga e um consequente pagamento de multa.

$$\min_{w,G,R} \sum_{t \in T} \left[ \lambda i^t \sum_{km \in \Omega} C i_{km}^t \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t + \lambda v^t \sum_{s \in \Phi} p_s \left( \sum_{k \in B} (C g_k G_{k,s}^t + C l s_k R_{k,s}^t) \right) \right] \quad (2a)$$

s.a:

$$\sum_{t \in T} \sum_{km \in \Omega} C i_{km}^t \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t \leq C_{total} \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T \quad (2b)$$

$$\sum_{km \in \Omega} S_0 f_{0km,s}^t + \sum_k S \sum_y \overline{n_{km}^t} f_{km,y,s}^t = G_{k,s}^t + R_{k,s}^t - D_{k,s}^t \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (2c)$$

$$\forall s \in \Phi$$

$$f_{km,y,s}^t = -b_{0km} n_{0km,y} (\theta_{k,s}^t - \theta_{m,s}^t) \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (2d)$$

$$\forall s \in \Phi, \forall k \in B$$

$$-M (1 - u_{km,y}^t) \leq \frac{f_{km,y,s}^t}{b_{km,y}} + (\theta_{k,s}^t - \theta_{m,s}^t) \leq M (1 - u_{km,y}^t) \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (2e)$$

$$\forall s \in \Phi, \forall k \in B$$

$$-n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \leq f_{0km,s}^t \leq n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (2f)$$

$$\forall s \in \Phi$$

$$-u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \leq f_{km,y,s}^t \leq u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (2g)$$

$$\forall y \in Y$$

$$-\bar{\theta} \leq \theta_{k,s}^t \leq \bar{\theta} \quad \forall k \in B \forall t \in T \quad (2h)$$

$$0 \leq G_{k,s}^t \leq \bar{G} \quad \forall k \in B, \forall t \in T \quad (2i)$$

$$0 \leq R_{k,s}^t \leq \bar{R} \quad \forall k \in B, \forall t \in T \quad (2j)$$

$$u_{km,y}^t = w_{km,y}^t + w_{km,y}^{t-1} + w_{km,y}^{t-2} + \dots + w_{km,y}^{t-m} \quad \forall km \in \Omega, m \in T - 1, \quad (2k)$$

$$\forall t \in T, \forall y \in Y,$$

$$u_{km,y}^t \leq u_{km,y}^{t+1} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (2l)$$

$$\forall y \in Y$$

$$\sum_y w_{km,y}^t \leq \overline{n_{km}^t} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (2m)$$

$$\forall y \in Y$$

$$\sum_{t \in T} w_{km,y}^t \leq 1 \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (2n)$$

$$\theta_{k,s}^t = 0 \quad \forall k \in \Omega_B | k = ref, \quad (2o)$$

$$t \in T, \forall s \in \Phi$$

$$u_{km,y}^t, w_{km,y}^t \text{ variáveis binárias} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (2p)$$

$$G_k^t, R_k^t, \theta_k^t, f_{0km,y}^t, f_{km,y}^t \text{ variáveis contínuas} \quad \forall y \in Y$$

Em que:

T é o conjunto de todos os estágios de tempo;

$\Omega_B$  é o conjunto de todas as barras do sistema;

$\Omega_R$  é o conjunto de todos os ramos do sistema;

$\Omega_y$  é o conjunto de todos os circuitos de cada ramo;

$\Phi$  é o conjunto de todos os cenários.

A variável  $p_s$  na equação (2a) corresponde à probabilidade de ocorrência de determinado cenário. Para cada cenário haverá valores diferentes de demanda, geração, corte de carga, fluxo de potência nas linhas e ângulo das barras.

Vale ressaltar sua similaridade com o modelo determinístico (1). Tanto que, caso  $p_s$  seja apenas um cenário possível, o modelo se torna idêntico ao caso determinístico.

A grande desvantagem do modelo estocástico é a quantidade de variáveis do modelo. Quanto mais cenários existirem, mais variáveis existirão no problema. Portanto, o esforço computacional do problema é diretamente proporcional à quantidade de cenários. Isto pode ser um problema grave para grandes sistemas de transmissão, onde o número de barras e ramos existentes é bem elevado e, conseqüentemente, existem muitas variáveis e restrições. Sendo assim, caso se adicione muitos cenários para o problema, o esforço computacional aumentará consideravelmente.

## **2.3 DESVANTAGENS**

Investimentos a longo prazo possuem uma dificuldade em prever com exatidão a demanda que um sistema de transmissão deve suportar no futuro. A demanda necessária a longo prazo não segue uma fórmula específica, portanto, existe apenas uma previsão de como ela irá se comportar. A incerteza dessa demanda faz com que os modelos apresentados anteriormente neste capítulo não apresentem uma solução 100% protegida contra eventuais mudanças na demanda prevista.

O modelo determinístico utiliza apenas um cenário de demanda possível para o sistema. É possível que novas tecnologias, que estão sempre surgindo no mercado, aumentem, mais do que o previsto, ou até mesmo diminua (devido a inserção de fontes distribuídas na rede de distribuição) a carga que determinada região necessita. Neste caso, o modelo determinístico não planejaria corretamente a expansão da rede de transmissão. Sendo assim, poderiam ocorrer eventuais cortes de carga, gerando diversos prejuízos para a região.

O modelo estocástico possui uma vantagem, com relação à incerteza da demanda, sobre o modelo determinístico. Como o modelo estocástico trabalha com vários cenários possíveis de demanda no futuro, este modelo é mais protegido contra eventuais variações da carga. Porém, para ter uma proteção maior contra variações, é necessário inserir diversos cenários no modelo. Isto pode aumentar significativamente a quantidade de variáveis do sistema e o esforço computacional.

Devido às desvantagens dos modelos propostos por Gondim (2016), é interessante um modelo que trate de uma maneira melhor a incerteza da demanda. O modelo robusto utiliza a decomposição de Benders para resolver o problema de otimização quando a demanda é considerada incerta. A decomposição de Benders é a divisão do problema em dois estágios e cada estágio gera cortes para outro estágio até que o modelo convirja. Um desses estágios utiliza

o conceito de dualidade para reescrever parte do problema. Dessa forma, antes de explicar como funciona a decomposição de Benders, é necessário explicar a teoria da dualidade.

## 2.4 TEORIA DA DUALIDADE

O conceito de dualidade diz que para cada problema de programação linear existe um outro problema de programação linear associado, que é chamado de *dual*. Há diversas propriedades relacionadas aos dois problemas. Entre as mais importantes, podemos citar que o valor da função objetivo do modelo *dual* é igual ao valor da função objetivo do problema original (chamado de *primal*). Ademais, as variáveis do problema *dual* são os valores marginais do problema *primal*. Esta última propriedade é bastante utilizada em diversos problemas de programação linear. O modelo proposto por Hillier & Lieberman (2009) tem a seguinte forma. Sejam  $x_j = (x_1, \dots, x_n)$  vetor de variáveis,  $c_j = (c_1, \dots, c_n)^T$  vetor de coeficientes que multiplicam o vetor  $x_j$ ,  $a_{i,j}$  e  $b_i = (b_1, \dots, b_m)^T$  são as matrizes dos coeficientes e o vetor de coeficientes, respectivamente, que multiplicam o vetor  $x_j$  na equação de restrição. Então o problema *primal* é definido como:

### **Primal**

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

s.a

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad \perp y_i$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Dado o problema *primal*, a forma *dual* tem a seguinte forma:

### **Dual**

$$\min y_0 = \sum_{i=1}^m b_i y_i,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n \quad \perp x_j$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Sendo que,  $y_i = (y_1, \dots, y_m)$  é o vetor de variáveis do problema *dual* e o valor marginal da equação de restrição do problema *primal* é igual à variável  $y_i$ .

Portanto, o problema *dual* utiliza os mesmos parâmetros do problema *primal*, porém



em locais diferentes. É importante observar que os parâmetros da restrição em um problema são os coeficientes da variável no outro problema, mostrando, assim, que existe uma relação direta entre esses dois problemas.

A propriedade de dualidade forte (*Strong duality property*) diz que caso  $x^*$  seja um valor ótimo da solução do problema *primal* e  $y^*$  seja uma solução ótima do problema *dual*, então

$$cx^* = y^*b$$

Esta propriedade é muito importante, pois ela permite que se utilize o formato *dual* para resolver o problema pela técnica da decomposição de Benders.

## 2.5 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

A decomposição de Benders (BD) é uma técnica muito utilizada para resolver programa linear inteiro misto (*Mixed Integer Linear Programming* – MILP). Esta técnica foi proposta por Benders em 1962. Esta técnica utiliza a teoria da dualidade para resolver parte do problema na forma *dual*. A decomposição de Benders funciona em dois estágios: o Subproblema e o problema Mestre.

REFORMULAÇÃO DO MILP:

O modelo generalizado proposto por Floudas, (1995) é mostrado nas equações (3a), (3b) e (3c) para explicar como funciona o método da decomposição de Benders. O vetor de coeficientes  $\mathbf{c}^T$  multiplica o vetor de variáveis binárias  $\mathbf{x}$  e o vetor  $\mathbf{b}^T$  multiplica o vetor de variáveis contínuas  $\mathbf{y}$ . As matrizes de coeficientes  $A$ ,  $B$  e o vetor de coeficientes  $g$  são os coeficientes que multiplicam as variáveis  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  na equação de restrição. Dessa forma:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad (3a)$$

$$s. a \quad A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \geq \mathbf{g} \quad (3b)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (3c)$$

$$\mathbf{x} \in \{0,1\} \text{ e } \mathbf{y} \geq 0$$

Reescrevendo (3a):

$$\min_x \left( c^T x + \min_y (b^T y : By \geq g - Ax, y \geq 0) \right) \quad (3d)$$

Fixando  $x = \bar{x}$ , o problema se torna:

$$\min_y \quad b^T y \quad (4a)$$

$$s.a \quad By \geq g - A\bar{x} \quad \perp u \quad (4b)$$

$$y \geq 0 \quad (4c)$$

E o seu *dual* é:

$$\max_u \quad u(g - A\bar{x}) \quad (5a)$$

$$s.a \quad uB \leq b \quad \perp y \quad (5b)$$

$$u \geq 0 \quad (5c)$$

Assim, a decomposição de Benders pode ser formulada da seguinte maneira:

O primeiro estágio é chamado de Subproblema:

$$\max_u \quad c\bar{x} + (g - A\bar{x})^T u \quad (6a)$$

$$s.a \quad B^T u \leq b \quad (6b)$$

$$u \geq 0 \quad (6c)$$

E o segundo estágio é chamado de problema Mestre:

$$\min_x \quad z = cx + \max_u \quad u(g - Ax) \quad (7a)$$

$$s.a \quad z \geq cx + (g - Ax)^T \bar{u} \quad (7b)$$

$$(g - Ax)\bar{u} \leq 0 \quad (7c)$$

A partir de um valor inicial fixado  $x = \bar{x}$ , resolve-se o subproblema (6), obtendo os valores de  $u$  e um limite superior  $UB = c\bar{x} + (g - A\bar{x})^T \bar{u}$ . Fixando-se o valor de  $u = \bar{u}$  obtido no subproblema e resolvendo o problema mestre (7), obtém-se um novo valor para a variável  $x$  e um limite inferior  $LB = \bar{z}$ . O novo valor de  $x$  é passado para o subproblema, que irá gerar um novo limite superior e um novo valor para  $u$ . Este novo  $u$  será usado pelo problema mestre até que, pelo critério de convergência, a diferença entre os limites superior e inferior seja menor do que um valor  $\epsilon$  aceitável.

## 2.6 FERRAMENTA COMPUTACIONAL GAMS

Todos os modelos desenvolvidos neste trabalho foram feitos através da ferramenta computacional *General Algebraic Modelling System* – GAMS/CPLEX (© 2008, GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA). Esta ferramenta resolve

diversos problemas de otimização e é, portanto, muito utilizada em diversas áreas, como os setores de transmissão de energia elétrica, químico e a área econômica.

A ferramenta *GAMS/CPLEX* permite resolver modelos de programação linear, não linear e programação linear inteira mista. Além disso, a ferramenta é capaz de importar e exportar dados para o Excel, o que facilita a utilização de dados que contêm muitos parâmetros.

## **2.7 FERRAMENTA COMPUTACIONAL *MATLAB***

O *MATLAB*® é um dos *softwares* mais utilizados por engenheiros e cientistas para resolver problemas matemáticos. Entre as diversas áreas em que esta ferramenta é utilizada, podemos citar a resolução de problemas na área de sistemas de potência, engenharia aeroespacial, robótica e sistemas de comunicação

Algumas matrizes desenvolvidas neste trabalho são muito grandes, o que dificulta a sua criação manualmente. Para facilitar a sua montagem, essas matrizes foram feitas com o auxílio da ferramenta computacional *MATLAB*® e depois exportadas para o Excel. Uma vez exportadas para o Excel, é possível exportar essas matrizes para o *GAMS* e assim resolver o modelo proposto.

### 3. MODELO ROBUSTO INCLUINDO A INCERTEZA DA EVOLUÇÃO DA CARGA

O modelo de otimização robusta trata a demanda como variável incerta. Para isso, utiliza como parâmetro a média e o desvio máximo aceito em relação ao valor nominal da carga prevista. Além disso, utiliza variáveis duais do sistema para resolver o problema. Esta técnica está sendo cada vez mais utilizada para resolver problemas, pois diminui a quantidade de variáveis do sistema e considera um longo espectro contínuo de incerteza com maior facilidade.

A abordagem pela otimização robusta utiliza o mesmo modelo mostrado em (1). Porém, ao invés de considerar a demanda como fixa, a forma robusta considera a demanda como se fosse incerta. Ademais, para poder resolvê-lo, é necessário que o sistema esteja na forma matricial. A sessão seguinte mostra um modelo exemplificativo de um sistema de três barras, com o intuito de identificar as matrizes e os vetores do sistema que representem o modelo proposto em (1).

#### 3.1 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

A forma matricial utilizada tem como base o trabalho de Bertsimas (2013), que utiliza um modelo generalizado para o planejamento da operação em sistemas de potência. A formulação é apresentada abaixo:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad (8a)$$

$$s. a. \quad Fx \leq f \quad (8b)$$

$$Hy \leq h \quad \perp \varphi \quad (8c)$$

$$Ax + By \leq g \quad \perp \lambda \quad (8d)$$

$$I_u y = d \quad \perp \eta \quad (8e)$$

$$x \in \{0,1\} \text{ e } y \geq 0$$

Essa formulação agrupa os termos comuns em matrizes. A função objetivo (8a) tem os custos de geração em cada barra  $c^T$  e os custos de operação do sistema  $b^T$ . As equações seguintes são as restrições do problema. Sendo assim, a equação (8b) agrupa as restrições que contém apenas variáveis binárias, como a equação de restrição de número máximo de circuitos utilizados. A equação (8c) é composta pelos termos presentes nas equações que contém apenas variáveis contínuas, como limites de geração, corte de carga, ângulo máximo e ângulo mínimo.

As matrizes da equação (8d) agrupam os termos das equações que possuem tanto variáveis contínuas quanto binárias, como o fluxo de potência. Por fim, a equação (8e) agrupa os parâmetros e variáveis da primeira lei de conservação de energia, em que a demanda é considerada incerta.

Para exemplificar, é mostrado o sistema de 3 barras que tem o intuito de facilitar o entendimento e a identificação de cada uma das matrizes. Ele possui 3 linhas de transmissão, geração na barra 1 e demanda na barra 2.

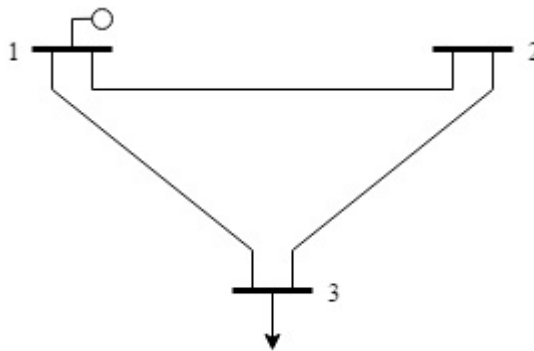


Figura 1- Sistema de 3 barras

Poderão ser adicionados até 2 circuitos em cada ramo do sistema (1-2, 1-3, 2-3). Além disso, para facilitar a compreensão do modelo, no exemplo foi considerado apenas um estágio de tempo e demanda fixa, ou seja, para esse modelo considera-se que a demanda requerida pelo sistema é conhecida.

A variável binária do problema indica em qual ramo  $km$  o circuito  $l$  foi adicionado. Para o sistema de 3 barras, o vetor  $x$  é representado da seguinte maneira:

$$x = [w_{km,l}] \rightarrow \begin{bmatrix} w_{12,1} \\ w_{13,1} \\ w_{23,1} \\ w_{12,2} \\ w_{13,2} \\ w_{23,2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A variável contínua  $y$  contém os níveis de geração em cada barra do sistema, corte de carga em cada barra, ângulo em cada barra e os fluxos de potência de cada linha do sistema. Dessa forma, a variável contínua  $y$  também é proporcional ao número de barras, ramos e circuitos do sistema. Para o sistema de 3 barras proposto, a variável  $y$  é:

$$y = \begin{bmatrix} G_k \\ R_k \\ \theta_k \\ f_{km,l} \\ f_{0_{km}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ f_{12,1} \\ f_{13,1} \\ f_{23,1} \\ f_{12,2} \\ f_{13,2} \\ f_{23,2} \\ f_{0_{12}} \\ f_{0_{13}} \\ f_{0_{23}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$G_k$  corresponde à geração em cada barra  $k$ ;  $R_k$  é o corte de carga em cada barra  $k$ ;  $\theta_k$  é o ângulo em cada barra;  $f_{km,l}$  é o fluxo de potência no circuito  $l$  do ramo  $km$  das novas linhas adicionadas; e  $f_{0_{km}}$  é o fluxo de potência das linhas iniciais do sistema.

Os parâmetros da função objetivo  $c^T$  e  $b^T$  são representados da seguinte maneira:

$$c^T = [Ci_{km}] \rightarrow [Ci_{12} \quad Ci_{13} \quad Ci_{23} \quad Ci_{12} \quad Ci_{13} \quad Ci_{23}], \quad (11a)$$

$$b^T = [Cg_k \quad cls_k]$$

$$b^T = [Cg_1 \quad Cg_2 \quad Cg_3 \quad cls_1 \quad cls_2 \quad cls_3 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (11b)$$

Mesmo para o exemplo acima, pode-se notar que as matrizes das equações de restrição são grandes, devido à complexidade e quantidade de restrições do problema. Além disso, para ajustar ao modelo proposto em (8), algumas restrições de igualdade foram modificadas para duas restrições de desigualdade, porém sem alterar os seus significados. As matrizes de restrição são apresentadas no apêndice B.

### 3.2 TRATAMENTO DA INCERTEZA

A grande diferença entre os modelos robusto e estocástico é a forma como a demanda é tratada. No caso robusto, diferentemente do estocástico, onde a demanda é uma distribuição probabilística, a demanda é tratada como um conjunto determinístico. Porém, como dito anteriormente, o valor da demanda é incerto. Portanto, é preciso desenvolver um conjunto que represente o espectro previsto da demanda. O modelo proposto por Bertsimas (2013) é mostrado

na equação (12):

$$D^t(\bar{d}^t, \hat{d}^t, \Delta^t): d^t \in \mathbb{R}^{N_d}: \sum_{k \in \Omega_d} \frac{|d_k^t - \bar{d}_k^t|}{\hat{d}_k^t} \leq \Delta^t \quad (12)$$

$$d_k^t \in [\bar{d}_k^t - \hat{d}_k^t; \bar{d}_k^t + \hat{d}_k^t], \forall k \in \Omega_d$$

Em que:

$\Omega_d$  é o conjunto de barras em que a demanda é considerada incerta;

$N_d$  é o número de barras em que a demanda é considerada incerta;

$\mathbf{d}_t = (d_k^t, k \in \Omega)$  é o vetor da demanda na barra  $k$  no período de tempo  $t$ ;

$\bar{d}_k^t$  é o valor nominal médio previsto da demanda na barra  $k$  no período de tempo  $t$ ;

$\hat{d}_k^t$  é o desvio da demanda em relação ao valor nominal na barra  $k$  no período de tempo  $t$ .

O intervalo de incerteza em que a demanda pode variar em relação ao valor nominal é  $[\bar{d}_k^t - \hat{d}_k^t, \bar{d}_k^t + \hat{d}_k^t]$ . Portanto, é necessário um valor nominal  $\bar{d}_k^t$ , que é uma estimativa do valor da demanda. Quanto maior for o desvio  $\hat{d}_k^t$ , maior será o intervalo de incerteza. A inequação (12) controla o desvio total da demanda nas barras  $k$  no período de tempo  $t$ . O parâmetro  $\Delta_t$  controla o desvio total que o sistema suportará. Caso  $\Delta_t = 0$ , o modelo não aceitará desvio na demanda em relação ao valor nominal e será, portanto, o caso determinístico apresentado na seção 3. À medida que  $\Delta_t$  aumenta, o conjunto de incerteza aumenta e, assim, o sistema estará robusto e protegido contra um grau maior de incerteza, sempre respeitando o limite máximo de variação imposto pelo intervalo  $[\bar{d}_k^t - \hat{d}_k^t, \bar{d}_k^t + \hat{d}_k^t]$ .

### 3.3 MODELO ROBUSTO 2 ESTÁGIOS

Após definido o sistema na forma matricial, é possível formular o modelo de otimização robusta de dois estágios. Adaptando o modelo proposto em (8), temos:

$$\min (\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \max \mathbf{b}^T \mathbf{y}(\mathbf{d})) \quad (13a)$$

$$s. a. \quad Fx \leq f \quad (13b)$$

$$Hy(d) \leq h(d) \quad \perp \varphi \quad (13c)$$

$$Ax + By(d) \leq g \quad \perp \lambda \quad (13d)$$

$$I_u y(d) = d \quad \perp \eta \quad (13e)$$

$$x \in \{0,1\}, y \geq 0 \text{ e } d \in D$$

A equação objetivo (13a) é composta de duas partes. A primeira parte  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  refere-se ao custo de investimento e a segunda,  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ , é o custo de operação do sistema. Esta segunda parte precisa ser escrita na sua forma *dual* para que se possa resolver o problema por decomposição de Benders.

Reescrevendo o problema  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$  na forma dual:

$$R(x) = \max \lambda^T (Ax - g) - \varphi^T h + \eta^T d \quad (14a)$$

$$s. a. \quad -\lambda^T B - \varphi^T H + \eta^T I_u = b^T \quad (14b)$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0, \eta \text{ livre}$$

Em que as variáveis  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$  são as variáveis duais das restrições (13c), (13d) e (13e), respectivamente. Pela teoria da dualidade, o valor marginal da equação (13c) corresponde à variável  $\varphi$ . Pelo mesmo motivo, o valor marginal da equação (13d) corresponde à variável  $\lambda$  e o valor marginal da equação (13e) corresponde à variável  $\eta$ .

Logo, utilizando o mesmo princípio da dualidade, o valor marginal da equação (14b) corresponde à variável  $y$  da equação 13. Essa informação é muito importante, pois é a partir dela que obtemos o valor de  $y$  ao resolver o modelo de otimização robusta pela técnica da decomposição de Benders.

Observe na equação (14a) que, ao se utilizar a forma *dual*, surge um termo com multiplicação de duas variáveis  $\eta^T d$ . Esse termo bilinear  $\eta^T d$  é não linear e precisa de um tratamento para que o programa consiga resolvê-lo.

A seção 3.4 mostra um algoritmo para a resolução do modelo (13). Ao se resolver  $R(x)$ , é utilizada uma linearização do termo bilinear para que se possa resolver o modelo no *GAMS*.

### 3.4 MÉTODO DE SOLUÇÃO DO MODELO ROBUSTO

Como explicado no capítulo 2, a decomposição de Benders divide o problema em dois estágios: o Subproblema e o problema Mestre. O primeiro estágio, com a variável binária de decisão fixada, gera um limite superior (UB — *upper bound*) e fornece os valores das variáveis duais que serão utilizadas no segundo estágio. O problema mestre utiliza os valores das variáveis duais encontradas no Subproblema para encontrar o valor da variável de decisão e encontrar um limite inferior (LB — *lower bound*). Caso o limite inferior seja igual ao limite superior, o problema está resolvido. Caso contrário, o algoritmo realizará iterações até que os limites converjam.



Segundo Bertsimas (2013), o algoritmo para a decomposição de Benders é:

Inicialização: definir um valor inicial  $\mathbf{x}_0$  e resolver  $R(x_0)$ :

$$R(x) = \max \lambda^T (Ax - g) - \varphi^T h + \eta^T d$$

*s. a .*

$$-\lambda^T B - \varphi^T H + \eta^T I_u = b^T$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0, \eta \text{ free}$$

Com a solução inicial  $(\varphi_1, \lambda_1, \eta_1)$ , definir o limite inferior  $L^{BD} = -\infty$ , limite superior  $U^{BD} = +\infty$  e o número de iteração  $k = 1$ . Escolher um nível de tolerância de convergência  $\epsilon (> 0)$ .

Iteração  $k \geq 1$ :

1) Resolver o problema mestre:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \alpha$$

$$s. a . \quad \alpha \geq \lambda_1^T (Ax - g) - \varphi_1^T h + \eta_1^T d$$

$$Fx \leq f, x \text{ binario}.$$

Definir  $L^{BD} = c^T x_k + \alpha_k$ .

2) Resolver o Subproblema  $R(x_k)$ :

Como o subproblema  $R(x_k)$  possui um termo bilinear, é necessário tratar desse termo antes de poder resolver  $R(x_k)$ . Isto será mostrado na subseção seguinte.

Definir  $(d_{k+1}, \varphi_{k+1}, \lambda_{k+1}, \eta_{k+1})$  como valores ótimos de solução e  $U^{BD} = c^T x_k + R(x_k)$ .

3) Conferir a convergência:

Se  $U^{BD} - L^{BD} < \epsilon$ , parar e retornar  $x_k$ , caso contrário  $k = k + 1$  e voltar para o passo 1.

## B. TERMO BILINEAR

Para resolver o termo não linear  $\eta^T d$  é preciso linearizar esse termo para que o programa possa resolvê-lo. Portanto, um algoritmo de linearização é mostrado a seguir para tratar do termo não linear:

Inicialização: fixar a variável  $x_k$  que veio da iteração  $k$  do algoritmo de Benders e definir um valor inicial  $d_1$ . Definir o limite inferior  $L^{OA} = -\infty$ , limite superior  $U^{OA} = +\infty$  e o número de iteração  $j = 1$ . Escolher um nível de tolerância de convergência  $\delta (> 0)$ .

Iteração  $j \geq 1$ :

1) Resolver o subproblema  $S(x_k, d_j)$ :

$$S(x_k, d_j) = \max \lambda^T (A x - g) - \varphi^T h + \eta^T d$$

*s. a.*

$$-\lambda^T B - \varphi^T H + \eta^T I_u = b^T$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0, \eta \text{ free}$$

Definir  $(\varphi_j, \lambda_j, \eta_j)$  como solução ótima,  $L^{OA} = S(x_k, d_j)$  e definir a linearização do termo bilinear  $\eta^T d$  no ponto  $(d_j, \eta_j)$ , como  $L_j(d, \eta)$ :

$$L_j(d, \eta) = \eta_j^T d_j + (\eta - \eta_j)^T d_j + (d - d_j)^T \eta_j$$

2) Resolver a versão linearizada de  $R(x_k)$ :

$$U(d_j, \eta_j) = \max \lambda^T (A x - g) - \varphi^T h + \beta$$

$$\beta \leq L_i(d, \eta) \quad \forall i = 1, \dots, j$$

$$-\lambda^T B - \varphi^T H + \eta^T I_u = b^T$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0, \eta \text{ free}$$

Definir  $(d_{j+1}, \varphi_{j+1}, \lambda_{j+1}, \eta_{j+1}, \beta_{j+1})$  como valores ótimos de solução e  $U^{OA} = U(d_j, \eta_j)$ .

3) Conferir a convergência:

Se  $U^{OA} - L^{OA} < \delta$ , parar e retornar  $\varphi, \lambda, \eta$  e  $d$ . Caso contrário  $j = j + 1$  e voltar para o passo 1.

O fluxograma mostrado na figura 2 resume o processo da decomposição de Benders.

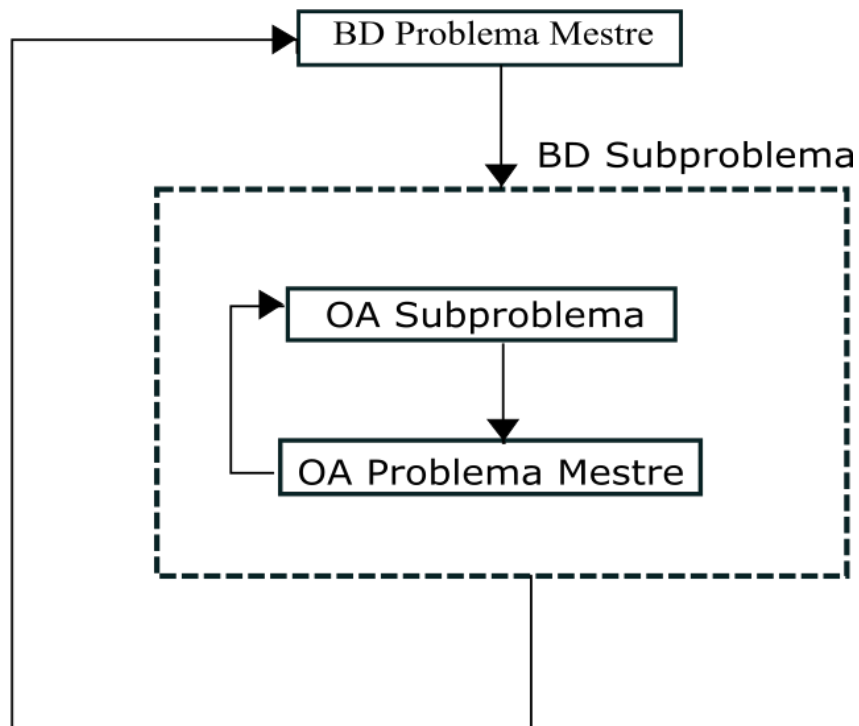


Figura 2 - Fluxograma da decomposição de Benders

Utilizando esse algoritmo, o código do modelo foi desenvolvido no *GAMS* com o auxílio do programa *MATLAB* e os seus resultados foram mostrados no capítulo seguinte.

## 4. TESTES E RESULTADOS

Para analisar o funcionamento do modelo proposto, o primeiro sistema utilizado foi o Garver de 6 barras. Devido ao seu tamanho e complexidade (ver apêndice B), as matrizes do sistema foram montadas com o auxílio do programa computacional *MATLAB*. Como o *GAMS* não consegue ler o formato utilizado pelo *MATLAB*, essas matrizes foram transferidas para o Excel e só depois lidas pelo *GAMS*.

### 4.1 SISTEMA GARVER

Alguns sistemas são muito utilizados em estudos de planejamento de expansão de sistemas de transmissão. Entre eles, há o sistema Garver de 6 barras (Garver, 1970). Embora pequeno, esse sistema permite analisar como o modelo proposto se comporta e de que maneira novas linhas de transmissão serão adicionadas à rede.

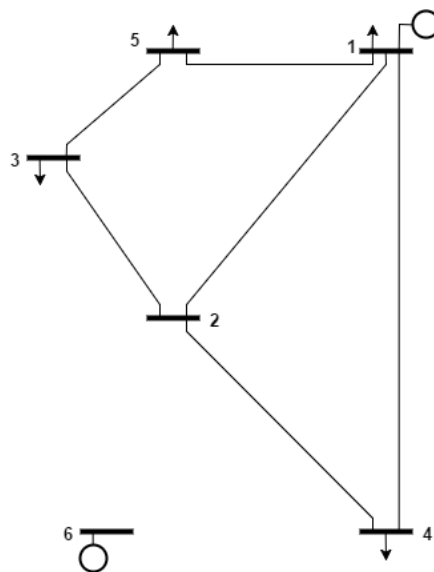


Figura 3 - Sistema Garver 6 barras

A figura 3 mostra o sistema Garver de 6 barras, em que já existem 6 linhas de transmissão na rede. Existe a possibilidade de adicionar 2 linhas novas ao sistema (ramos 2-6 e 4-6), além de novos circuitos às linhas já existentes. O sistema possui unidades geradoras nas barras 1 e 6 e demanda de carga nas barras 1, 3, 4 e 5.

O sistema tem limite de circuitos adicionados em cada ramo, fluxo máximo de potência que cada ramo permite e valores máximos de geração em cada barra. Ademais, os custos de investimento para construir uma nova linha de transmissão e a reatância de cada linha variam

para cada uma delas, pois dependem de alguns fatores como o comprimento da linha. Os dados desses parâmetros estão no Apêndice A e foram retirados do estudo feito por Cascalho (2015)

#### 4.2 PRIMAL E DUAL

Para garantir o correto funcionamento do algoritmo Benders, inicialmente foi feita uma comparação entre o *primal* e o *dual* do segundo estágio do modelo proposto em (13). Para que o programa funcione corretamente, é necessário que a forma *dual* retorne valores equivalentes ao modelo *primal*, ou seja, o valor objetivo das duas formas tem que ser igual e o valor marginal da equação de restrição do modelo *dual* tem que ser igual à variável contínua  $y$  presente na forma *primal*.

Como o objetivo deste teste é apenas verificar que o modelo *dual* está funcionando corretamente, para facilitar o programa a demanda foi considerada como determinística – ou seja, para este modelo existe apenas um cenário de demanda possível.

O sistema utilizado para a análise foi o proposto por Garver de 6 barras. Os parâmetros referentes à geração máxima, demanda, fluxo máximo em cada ramo, reatância, número máximo de circuitos que podem ser adicionados em cada ramo e os custos relacionados à instalação e à operação do sistema estão no apêndice A.

Tabela 4.1 - Custo de operação para os casos *primal* e *dual*

	<i>Primal</i> ( $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ )	<i>Dual</i> $z$
Custo de Operação (\$)	3.608.810,94	3.608.810,94

Tabela 4.2 - Vetor de Geração Caso *Primal* e Caso *Dual*

BARRA	$G_k(MW)$ <i>Primal</i>	$G_k(MW)$ <i>Dual</i>
(1)	28,2	28,2
(2)	-	-
(3)	-	-
(4)	-	-
(5)	-	-
(6)	67,3	67,3

Tabela 4.3 - Resultados de Fluxo de Carga

LINHA	ORIGEM	DESTINO	$f_{km} (MW)$ <i>Primal</i>	$f_{km} (MW)$ <i>Dual</i>
(1)	1	2	-10,37	-10,37
(2)	1	4	2,51	2,51
(3)	1	5	23,46	23,46
(4)	2	3	33,04	33,04
(5)	2	4	14,13	14,13
(6)	2	6	-57,53	-57,53
(7)	3	5	23,94	23,94
(8)	4	6	-9,77	-9,77

As tabelas 4.1, 4.2, e 4.3 comprovam que o modelo *dual* está funcionando corretamente. A última coluna da tabela 4.1 mostra o valor da função objetivo do modelo *dual*, que deve ser igual à parte relativa ao custo de operação do modelo *primal*, como mostra a segunda coluna da tabela 4.1. Além disso, as tabelas 4.2 e 4.3 mostram a geração em cada barra e o fluxo de carga em cada linha. Nos dois modelos, houve geração de 28,2 MW na barra 1 e 67,3 MW na barra 6 e o fluxo de carga em cada linha foi igual tanto para o caso *primal* quanto para o caso *dual*. Nos casos em que o fluxo de potência está negativo, o modelo entendeu que o mais eficiente é enviar energia elétrica no sentido contrário, ou seja, da barra destino para barra origem.

Visto que o modelo *dual* está funcionando corretamente, é possível desenvolver um modelo completo de planejamento de expansão de linhas de transmissão. A próxima seção mostra as análises de um modelo de expansão do sistema Garver de 6 barras.

### 4.3 SISTEMA GARVER 6 BARRAS

Após verificar o funcionamento do modelo *dual*, desenvolveu-se o código para analisar o sistema Garver de 6 barras. O código utiliza o programa computacional *GAMS* e executa o algoritmo apresentado na seção 3.4. Ele teve como base o código criado por Kalvelagen, (2005) e é mostrado no apêndice C.

O primeiro teste realizado foi para o caso base. Ele considera que a incerteza da demanda é maior à medida que o estágio de tempo aumenta. Sendo assim, para o primeiro estágio de tempo  $t=1$ , admite-se que a demanda varie 10% em relação ao seu valor nominal.

Para  $t=2$  existe uma incerteza maior e o desvio em relação ao valor nominal é de 25%. No último estágio de tempo  $t=3$ , a incerteza é a maior possível e tem-se, então, um desvio máximo de 40% em relação a demanda nominal. Ademais, o parâmetro que controla quanto de desvio o sistema suportará será  $\Delta_t = 0$ .

Os resultados do teste são apresentados nas tabelas 4.4, 4.5 e 4.6:

Tabela 4.4 – Sistema Garver. Valores de demanda (MW) em cada barra para  $\Delta^t = 0$

	$\hat{d}_k^1 = 0,1\bar{d}_k^1$	$\hat{d}_k^2 = 0,25\bar{d}_k^2$	$\hat{d}_k^3 = 0,4\bar{d}_k^3$
BARRA	t=1	t=2	t=3
(1)	4	4,2	4,4
(2)	-	-	-
(3)	2	2,1	5
(4)	2	8,4	10
(5)	12	15,4	20
(6)	-	-	-

Tabela 4.5 - Sistema Garver. Circuitos adicionados em cada linha para  $\Delta^t = 0$

LINHA	ORIGEM	DESTINO	t=1	t=2	t=3
(1)	1	2	-	-	-
(2)	1	4	-	-	-
(3)	1	5	-	-	-
(4)	2	3	1	-	1
(5)	2	4	-	-	-
(6)	2	6	2	-	-
(7)	3	5	-	-	1
(8)	4	6	-	-	-
Total de Circuitos adicionados: 5					

Tabela 4.6 - Iterações e custo total (\$ x 10<sup>6</sup>) do sistema Garver para  $\Delta^t = 0$

Iteração	LB	UB
Iter1	3.609	352.622
Iter2	13.884	352.622
Iter3	14.184	352.622
Iter4	16.619	352.622

Iter5	16.622	352.622
Iter6	16.919	352.622
Iter7	16.994	352.622
Iter8	17.291	352.622
Iter9	18.760	352.622
Iter10	18.958	352.622
Iter11	19.060	352.622
Iter12	19.060	19.060

A tabela 4.4 mostra que a demanda calculada foi igual ao valor nominal (tabela A.2). Este resultado era esperado, pois como  $\Delta^t = 0$ , o sistema não admite desvio da demanda em relação ao seu valor nominal. Para este caso, o sistema não está, portanto, protegido contra possíveis variações da carga em relação ao seu valor previsto.

A tabela 4.5 mostra como ocorreu o planejamento da expansão do sistema. O modelo indicou a adição de 2 circuitos novos no ramo 2-3, sendo que um foi adicionado no primeiro estágio de tempo e, o outro, no último. Dois circuitos foram adicionados ao ramo 2-6 no primeiro estágio de tempo e um circuito foi adicionado no ramo 3-5 no último estágio de tempo, totalizando 5 circuitos novos para o sistema.

O custo total da expansão da rede é mostrado na tabela 4.6. Como o modelo funciona através do algoritmo de Benders, o valor do custo é obtido através de sucessivas iterações, ou seja, resolvendo o subproblema, obtém-se o limite superior (UB) e o valor das variáveis que serão usadas no problema mestre – que irá calcular um valor para o limite inferior (LB) e fornecer os valores das variáveis do subproblema. Isso ocorrerá até que a diferença entre os limites superior e inferior esteja dentro de um limite aceitável. Portanto, após 12 iterações foi obtido um valor de custo de \$ 19.606.000. Sendo que \$15.451.000 corresponde ao custo de investimento em novas linhas de transmissão e \$3.609.000 corresponde ao custo de operação do sistema.

Após verificar como o modelo se comporta no caso base, analisou-se o modelo quando pretende-se obter um sistema que seja protegido contra eventuais aumentos na carga prevista. Portanto, o desvio  $\hat{d}_k^t$  em relação ao valor nominal é o mesmo do caso base, porém o valor de  $\Delta^t$  foi alterado para 1. Os resultados do teste estão nas tabelas 4.7, 4.8 e 4.9:

Tabela 4.7 - Sistema Garver. Valores de demanda calculada (MW) em cada barra considerando o desvio  $\hat{d}_k^t$ , para  $\Delta^t = 1$

	$\hat{d}_k^1 = 0,1\bar{d}_k^1$	$\hat{d}_k^2 = 0,25\bar{d}_k^2$	$\hat{d}_k^3 = 0,4\bar{d}_k^3$
BARRA	t=1	t=2	t=3
(1)	4,4	5,3	6,2
(2)	-	-	-
(3)	2,2	2,6	7
(4)	8,8	10,5	14
(5)	13,2	19,3	28
(6)	-	-	-



Tabela 4.8 - Sistema Garver. Circuitos adicionados em cada linha para  $\Delta^t = 1$

LINHA	ORIGEM	DESTINO	t=1	t=2	t=3
(1)	1	2			
(2)	1	4			
(3)	1	5			
(4)	2	3		1	1
(5)	2	4			
(6)	2	6	2		1
(7)	3	5			1
(8)	4	6		1	1
Total de Circuitos adicionados: 8					

Tabela 4.9 - Iterações e custo total (\$ x 10<sup>6</sup>) do sistema Garver para  $\Delta^t = 1$

Iteração	LB	UB
Iter1	4.552	353.566
Iter2	21.402	353.566
Iter3	26.703	353.566
Iter4	26.720	353.566
Iter5	26.875	353.566

Iter6	27.239	353.566
Iter7	27.245	353.566
Iter8	27.301	353.566
Iter9	27.664	353.566
Iter10	29.064	353.566
Iter11	29.214	353.566
Iter12	29.214	29.214

Diferentemente do teste anterior, a tabela 4.7 mostra que quando  $\Delta^t = 1$ , o sistema está protegido contra o maior grau de incerteza definido anteriormente. Ou seja, o valor calculado da variável  $d_k$  foi de  $1,1\bar{d}_k^1$  para o primeiro estágio de tempo, de  $1,25\bar{d}_k^2$  para o segundo estágio de tempo e de  $1,4\bar{d}_k^3$  para o último estágio de tempo. Esses valores são os valores máximos do intervalo  $[\bar{d}_k^t - \hat{d}_k^t, \bar{d}_k^t + \hat{d}_k^t]$ . Caso a demanda seja maior do que a prevista (valor nominal), este modelo garante que o sistema está protegido contra esse aumento na previsão da carga.

Observe pela tabela 4.8 que, quando se aumenta  $\Delta^t$ , o número de circuitos adicionados também aumenta, pois como o sistema precisa estar protegido contra uma carga maior, é necessário adicionar um número maior de circuitos. Para  $\Delta^t = 1$ , o modelo planeja a construção de 8 novos circuitos. Dois circuitos no ramo 2-3, três circuitos no ramo 2-6, um circuito no ramo 3-5 e dois circuitos no ramo 4-6.

Uma consequência da proteção maior do sistema contra variações na carga prevista é o

aumento no custo do projeto, pois como o número de linhas novas aumentou, o custo de investimento também aumentou. A tabela 4.9 mostra que, após 12 iterações, o modelo obteve um valor de custo do projeto de \$29.214.000, sendo que \$24.661.000 correspondem ao custo de investimento e \$4.552.000 correspondem ao custo de operação do sistema. A tabela 4.10 mostra os custos do sistema para diferentes valores de  $\Delta^t$ .

Tabela 4.10 - Custos do sistema Garver (\$ x 10<sup>6</sup>) para diferentes valores de  $\Delta^t$ .

$\Delta^t$	Custo de Operação	Custo de Investimento	Custo Total
0.0	3,61	15,45	19,06
0.1	3,70	15,82	19,52
0.2	3,80	18,65	22,45
0.3	3,89	18,68	22,57
0.4	3,99	18,98	22,96
0.5	4,08	18,98	23,06
0.6	4,18	19,10	23,28
0.7	4,269	22,05	26,319
0.8	4,364	22,03	26,576
0.9	4,458	24,661	29,119
1.0	4,552	24,661	29,214

Os valores de  $\hat{d}_k^t$  utilizados no teste são  $\hat{d}_k^1 = 0,1\bar{d}_k^1$ ,  $\hat{d}_k^2 = 0,25\bar{d}_k^2$  e  $\hat{d}_k^3 = 0,4\bar{d}_k^3$ . Observe que o custo total e o custo de investimento aumentam à medida que se aumenta  $\Delta_t$ . Isso é esperado, pois é necessário adicionar mais circuitos às linhas de transmissão para garantir que o sistema esteja protegido contra esse aumento de carga.

Também foi analisada, no modelo, a influência nos custos de investimento e de operação do sistema quando se varia o valor do desvio  $\hat{d}_k^t$ . A figura 4 mostra os valores dos custos de investimento e de operação para diferentes valores de  $\hat{d}_k^t$ .

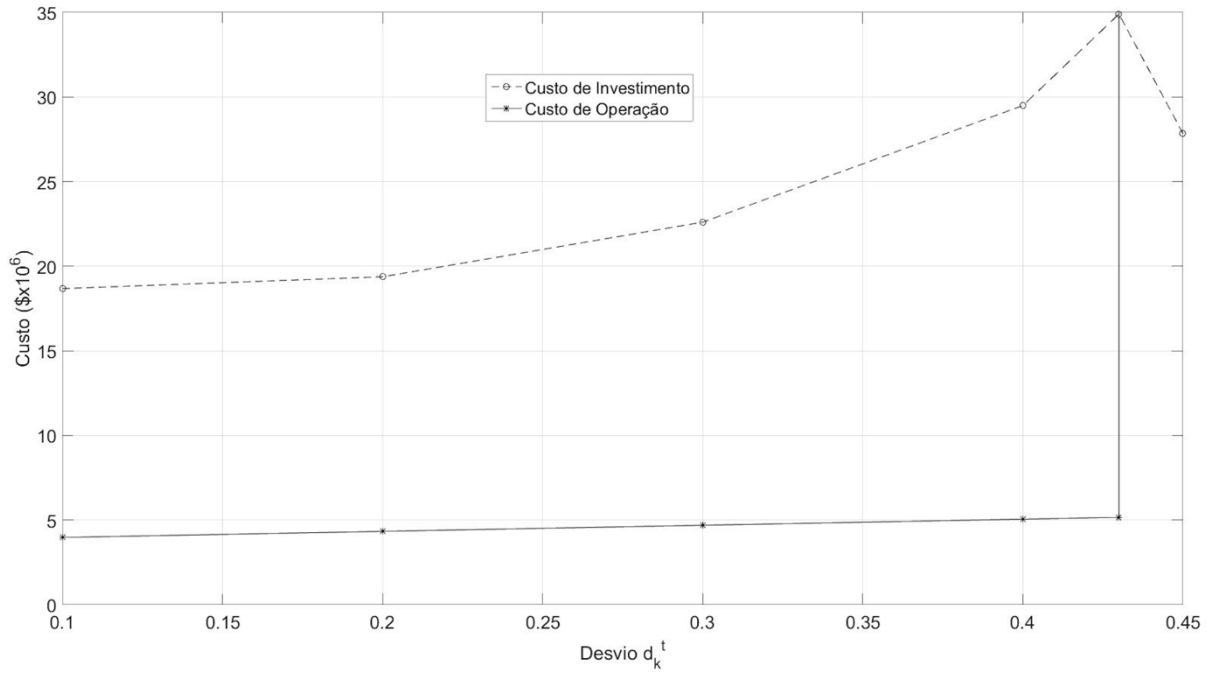


Figura 4 - Custos do sistema x Desvio

O eixo das abcissas contém os valores de  $\hat{d}_k^t$  e o eixo das ordenadas contém os valores dos custos. Observe que, até  $\hat{d}_k^t = 0,43\bar{d}_k^t$ , a curva relacionada ao custo de operação é praticamente uma reta e os seus valores não variam muito. A curva do custo de investimento, diferentemente do custo de operação, cresce exponencialmente ao aumentar o valor do desvio. Logo, o valor do custo total do projeto recebe uma influência muito maior do custo de investimento ao se aumentar o desvio da demanda aceita em relação ao seu valor nominal. Vale ressaltar que, para valores de  $\hat{d}_k^t$  maiores que 43%, o modelo gera um corte de carga, aumentando, assim, significativamente o custo de operação do sistema.

#### 4.4 SISTEMA 14 BARRAS IEEE

Após analisar como o modelo de otimização robusta se comporta no sistema Garver de 6 barras, foram feitos testes para o sistema teste IEEE-14 (Figura 5). O sistema possui 14 barras, 20 linhas de transmissão, geração nas barras 1 e 2 e demanda de carga nas barras 3 a 14. Os valores dos parâmetros utilizados estão no apêndice A.

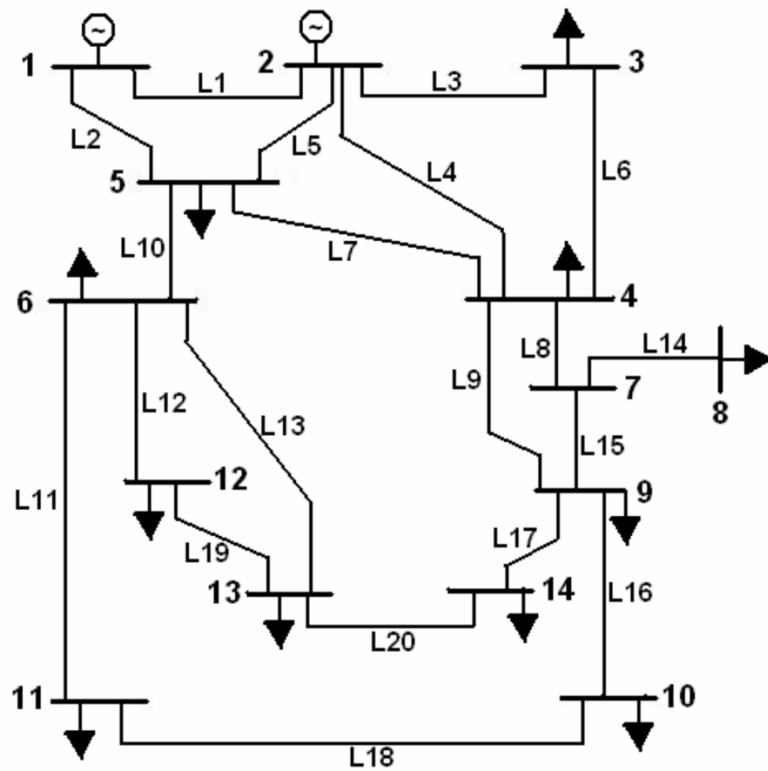


Figura 5 - Sistema IEEE-14. Fonte: Afonso, 2008.

Tabela 4.11 - Sistema IEEE-14,  $\Delta^t = 0$  e  $\hat{d}_k^t = 0,1\bar{d}_k^t$

Custo Investimento (\$ x 10 <sup>6</sup> )	Custo de Operação (\$ x 10 <sup>6</sup> )	Custo Total (\$ x 10 <sup>6</sup> )
22.934	7.560	30.493
Número de Circuitos Adicionados: 8		

A tabela 4.11 mostra os resultados do primeiro teste realizado, que considerou geração nas barras 1 e 2, sendo que os valores máximos de geração estão no apêndice A. Para  $\Delta_t = 0$ , após 81 iterações, o modelo adicionou 8 circuitos novos ao sistema e teve um custo total de \$30.493.000. Desse valor total, \$22.934.000 refere-se ao custo de investimento e \$7.560.000 refere-se ao custo operacional do sistema.

O fato de  $\Delta_t = 0$  não garante proteção contra possíveis variações na demanda nominal prevista, e, por este motivo, é necessário um modelo robusto para valores de  $\Delta^t$  variando entre 0 e 1. Entretanto, com apenas duas unidades geradoras, o modelo realizou 200 iterações e não convergiu para  $\Delta^t$  maior do que 0.2. Por isso, uma unidade geradora de menor porte foi adicionada à barra 3.

Com 3 unidades geradoras e considerando  $\Delta^t = 1$ , após 191 iterações, o modelo convergiu, com um custo total de \$34.770.000, o custo de investimento foi \$26.455.000 e o custo operacional foi \$8.316.000.000. Embora atenda aos requisitos propostos pelo problema, 191 iterações significa um esforço computacional muito maior se comparado com os modelos apresentados anteriormente. Ademais, o modelo adicionou 9 novos circuitos ao sistema, como mostra a tabela 4.12.

Tabela 4.12 – Sistema IEEE-14. Circuitos adicionados em cada linha e custos para cada caso de geração.  $\Delta^t = 1$  e  $\hat{d}_k^t = 0,1\bar{d}_k^t$

			$\bar{G}_1 = 135 (MW)$ , $\bar{G}_2 = 165 (MW)$ e $\bar{G}_3 = 45 (MW)$			$\bar{G}_1 = 135 (MW)$ , $\bar{G}_2 = 165 (MW)$ e $\bar{G}_9 = 45 (MW)$		
LINHA	ORIGEM	DESTINO	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
2	1	5	1			1		
4	2	4	1			1		
5	2	5	1			1		
6	3	4	1					
8	4	7		1				
9	4	9	1					
10	5	6	1	1		1	1	
17	9	14	1					
Número de circuitos adicionados			9			5		
Custo total (\$ x 10 <sup>6</sup> )			34.771			23.043		
Custo de investimento (\$ x 10 <sup>6</sup> )			26.455			14.727		
Custo operacional (\$ x 10 <sup>6</sup> )			8.316			8.316		

Ao analisar os dados referentes ao fluxo de potência em cada linha no último teste, observou-se que as linhas que conectam as barras 1, 2 e 3 (barras que apresentam unidades geradoras) ficaram no limite, ou muito próximo dele, pois precisam suportar a carga necessária para atender toda a rede de transmissão. Visando corrigir esse problema, um novo teste foi feito com a unidade geradora de menor porte na barra 9 ao invés da barra 3. Isto gerou uma folga para as linhas que conectam as barras 1, 2 e 3 e, com apenas 18 iterações, o novo modelo adicionou 5 novos circuitos, sendo que 1 foi no ramo 1-5; 1 no ramo 2-4, 1 no ramo 2-5 e 2 no ramo 5-6. O custo total do sistema foi \$23.043.000. Desse valor total,

\$14.727.000 refere-se ao custo de investimento e \$8.316.000 refere-se ao custo de operação, como mostra a tabela 4.12.

Com a mudança da terceira unidade geradora da barra 3 para a barra 9, custo de investimento do sistema reduziu significativamente, pois foram instalados 3 circuitos a menos. Isto ocorreu porque a geração na barra 9, mesmo fornecendo menos energia elétrica do que das barras 1 e 2, diminuiu a quantidade de carga que as linhas conectadas as barras 1 e 2 precisam suportar, diminuindo, assim, o custo de investimento do sistema. Além disso, o esforço computacional diminuiu significativamente, foram necessárias apenas 18 iterações, contra 191 iterações do teste anterior. O custo de operação dos dois testes foi praticamente igual, pois a geração em cada barra deles foi muito parecida. Logo, o fator principal para a redução no custo foi a alteração da barra em que a terceira unidade geradora foi instalada. A tabela A.5 do apêndice A mostra os valores máximos de geração para cada estágio de tempo da terceira unidade geradora.

Uma tabela mostrando como o sistema de 14 barras com geração na barra 9 se comporta quando varia o valor de  $\Delta^t$  é mostrado a seguir:

Tabela 4.13 - Custos do sistema IEEE-14 (\$ x 10<sup>6</sup>) para diferentes valores de  $\Delta^t$

$\Delta^t$	Custo de Operação	Custo de Investimento	Custo Total	Nº circuitos adicionados
0.0	7,56	9,00	16,56	3
0.1	7,64	9,00	16,64	3
0.2	7,71	11,48	19,19	4
0.3	7,79	11,48	19,27	4
0.4	7,86	11,48	19,34	4
0.5	7,94	13,96	21,90	5
0.6	8,01	14,21	22,22	5
0.7	8,09	14,21	22,30	5
0.8	8,17	14,21	22,38	5
0.9	8,24	14,46	22,70	5
1.0	8,32	14,73	23,05	5

O valor utilizado para  $\hat{d}_k^t$  foi  $0,1\bar{d}_k^t$ . Observe que, para alguns valores de  $\Delta^t$ , mesmo o número de circuitos sendo igual, o custo de investimento foi diferente, pois o estágio de tempo  $t$  em que os circuitos foram adicionados é diferente.

## 5. CONCLUSÃO

O planejamento da expansão de redes de transmissão é fundamental para que uma região não sofra problemas com falta de demanda no futuro. Um modelo que resulta em uma solução eficiente é essencial para garantir que a expansão ocorra de forma viável. Minimizar os custos de investimento do projeto é tão importante quanto garantir carga para todos os destinos. Um modelo que garanta a demanda para todas as regiões, mas que não o faça de forma economicamente viável é impraticável na realidade.

Os modelos estocástico e determinístico são exemplos de modelos de expansão de redes de transmissão. O modelo determinístico, embora mais simples do ponto de vista computacional, só considera um cenário de demanda possível para o sistema, o que não o protege contra uma eventual variação da carga e pode gerar prejuízos. O modelo estocástico corrige essa falha, pois considera diversos cenários de demanda. Porém, embora garanta uma maior proteção contra variações na carga, quanto mais cenários forem adicionados ao modelo, maior será a quantidade de variáveis do problema e, conseqüentemente, maior será o esforço computacional necessário para resolver o problema, como mostra o trabalho do Gondim (2016).

Visando corrigir essas falhas, o modelo de otimização robusta não considera a demanda como um parâmetro pré-definido, mas sim como uma variável. Para que isto possa ocorrer, é necessário definir um valor de demanda nominal. Este parâmetro seria a demanda prevista para determinado intervalo de tempo. Ademais, é necessário definir um valor de desvio permitido da demanda em relação ao seu valor nominal.

A técnica utilizada para resolver o modelo robusto foi a decomposição de Benders. Esta técnica utiliza variáveis duais para reescrever parte do problema e dividi-lo em dois estágios. Cada estágio cria limites superiores e inferiores para o problema e quando esses limites se igualam ou são menores do que um valor aceitável, o programa está resolvido.

O principal sistema utilizado para testar o modelo robusto proposto foi o sistema Garver de 6 barras. Inicialmente, foi verificado que a parte *dual* do problema está funcionando corretamente e, depois, foram feitos os testes com o sistema Garver.

A proteção do sistema contra variações na carga depende, principalmente, de dois fatores. O desvio  $\hat{d}_k^t$  em relação à demanda nominal  $\bar{d}_k^t$  permite que o sistema tenha uma folga contra possíveis aumentos na carga. Porém, isto só ocorrerá caso  $\Delta^t > 0$ . O parâmetro  $\Delta^t$  controla o quanto de desvio o sistema aceitará. Para  $\Delta^t = 0$ , o sistema se comporta como o caso

determinístico e, à medida que o valor de  $\Delta^t$  aumenta, o sistema fica mais protegido – mas o custo de investimento e o número de linhas de transmissão a serem adicionadas também aumentam. O custo de operação do sistema tende a não variar muito quando se aumenta os valores de  $\Delta^t$  e  $\hat{d}_k^t$ .

Após verificar o funcionamento do modelo no sistema Garver, alguns testes foram realizados no sistema maior de 14 barras IEEE. O modelo com geração nas barras 1 e 2 chegou a um resultado após 80 iterações, para  $\Delta^t = 0$ . Porém com apenas 2 unidades geradoras, para valores de  $\Delta^t$  maior do que 0.2, o modelo não converge. Por este motivo, foi adicionada uma terceira unidade geradora ao modelo, inicialmente à barra 3. Para este caso, o modelo chegou à uma solução após 191 iterações e com um custo elevado. Alterando a unidade geradora para a barra 9, o modelo se comportou muito melhor, com um custo total mais baixo e precisou de apenas 18 iterações para chegar no seu valor final. A adição de uma terceira unidade geradora não teve muita influência no custo operacional do sistema, porém o local em que ela é adicionada influencia no número de circuitos que precisam ser instalados na rede para atender a demanda e na quantidade de iterações que o modelo precisa para convergir.

O modelo de planejamento da expansão da transmissão apresentado neste trabalho vem ao encontro da necessidade atual de modelos que incorporem a maior incerteza da demanda futura, decorrente da expansão de fontes de geração distribuídas e de fontes com elevada variabilidade de geração.

## 5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Acrescentar o planejamento da expansão da geração de energia ao longo do tempo e sua influência na tomada de decisão do modelo;
- Acrescentar a confiabilidade da transmissão e da geração. As linhas de transmissão e as unidades geradoras podem necessitar de manutenção ou até mesmo apresentar falhas, por isso é interessante um modelo que considere a hipótese do sistema funcionar com uma linha ou gerador a menos;
- Índices de confiabilidade.
- Avaliar o modelo considerando desvios negativos da demanda.



## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afonso, R. A. (2008). Uma Metodologia Baseada no Uso para Penalizar Indisponibilidades em Redes de Transmissão.
- Bertsimas, D., Litvinov, E., Andy Sun, X., Zhao, J. Z., & Zheng, T. (FEVEREIRO de 2013). Adaptive Robust Optimization for the Security Constraint Unit Commitment Problem. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 28.
- Cascalho, J. D. (2015). Modelo de Planejamento da Expansão das Redes de Alta e Média Tensão de Distribuição de Energia Elétrica Considerando Critérios Econômicos de Desempenho.
- Escobar, A. H., Romero, R., & Gallego, R. (2008). Transmission network expansion planning considering multiple generation scenarios. *IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*.
- Floudas, C. A. (1995). *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization, Fundamentals and Applications*. Oxford University Press.
- Glover, D., Sarma, M., & Overby, T. J. (2011). *Power System Analysis and Design* (5ª Edição ed.). Cengage Learning.
- Gondim, G. T. (2016). *Planejamento de expansão de redes de transmissão considerando a incerteza da demanda*. Brasília, DF: Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2009). *Introduction to Operations Research* (9ª Edição ed.). McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- Kalvelagen, E. (2005). *Benders Decomposition with GAMS*. Fonte: <http://amsterdamoptimization.com/pdf/benders.pdf>
- Kalvelagen, E. (2009). *Some MINLP Solution Algorithms*. Fonte: <http://www.amsterdamoptimization.com/pdf/minlp.pdf>
- Vinasco, G., Rider, M. J., & Romero, R. (novembro de 2011). A Strategy to Solve the Multistage Transmission Expansion Planning Problem. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 26.

## 7. APÊNDICE

### APÊNDICE A. DADOS DO SISTEMA GARVER E IEEE-14

Dados do sistema Garver 6 barras utilizados no modelo de otimização robusta

Tabela A.1 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema Garver de 6 barras.

Ramo (km)	$n_{0_{km}}^t$	$\bar{f}_{km}$ (MW)	$re_{km}$ (pu)	$\overline{n_{km}^t}$			$Ci_{km}^t$ (\$ x 10 <sup>6</sup> )		
				t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
1-2	1	10	0,4	1	1	1	5,00	5,10	5,22
1-4	1	8	0,6	1	1	1	6,00	6,30	6,62
1-5	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,15	3,31
2-3	1	10	0,2	1	1	1	2,80	2,90	2,95
2-4	1	10	0,4	1	1	1	4,00	4,20	4,41
2-6	0	10	0,3	2	1	1	3,80	3,95	4,05
3-5	1	10	0,2	1	1	1	2,70	2,85	2,95
4-6	0	10	0,3	1	1	1	3,50	3,55	3,60

Tabela A.2 - Parâmetros referentes às barras do sistema Garver de 6 barras

Barra (k)	Demanda (MW)			Geração Máxima		
	t = 1	t = 2	t = 3	t = 1	t = 2	t = 3
1	4	4,2	4,4	10	12	12,1
2	-	-	-	-	-	-
3	2	2,1	5	-	-	-
4	8	8,4	10	-	-	-
5	12	15,4	20	-	-	-
6	-	-	-	40	42	46
Por Período	26	30,1	39,4	50	54	58,1
Total	95,5			162,1		

Dados do sistema IEEE 14 barras utilizados no modelo de otimização robusta

Tabela A.3 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema IEEE-14.

Ramo (km)	$n_{0km}^t$	$\bar{f}_{km}$ (MW)	$re_{km}$ (pu)	$\bar{n}_{km}^t$			$Ci_{km}^t$ (\$ x 10 <sup>6</sup> )		
				t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
1-2	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
1-5	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
2-3	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
2-4	1	10	0,3	1	1	1	3,00	3,00	3,00
2-5	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
3-4	1	10	0,3	1	1	1	3,00	3,00	3,00
4-5	1	10	0,3	1	1	1	3,00	3,00	3,00
4-7	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
4-9	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
5-6	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
6-11	1	10	0,6	1	1	1	3,00	3,00	3,00
6-12	1	10	0,3	1	1	1	3,00	3,00	3,00
6-13	1	10	0,4	1	1	1	3,00	3,00	3,00
7-8	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
7-9	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
9-10	1	10	0,4	1	1	1	3,00	3,00	3,00
9-14	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
10-11	1	10	0,6	1	1	1	3,00	3,00	3,00
12-13	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00
13-14	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,00	3,00

Tabela A.4 - Parâmetros referentes às barras do sistema IEEE-14

Barra (k)	Demanda (MW)			Geração Máxima		
	t = 1	t = 2	t = 3	t = 1	t = 2	t = 3
1	-	-	-	40	45	50
2	-	-	-	50	55	60
3	3	3,3	3,63	-	-	-
4	10	11	12,1	-	-	-
5	7	7,7	8,47	-	-	-
6	8	8,8	9,68	-	-	-
7	4	4,4	4,84	-	-	-
8	7	7,7	8,47	-	-	-
9	2	2,2	2,42	-	-	-
10	3	3,3	3,63	-	-	-
11	3	3,3	3,63	-	-	-
12	4	4,4	4,84	-	-	-
13	5	5,5	6,05	-	-	-
14	4	4,4	4,84	-	-	-
Por Período	60	66	72,6	90	100	110
Total	198,6			300		

Tabela A.5 Geração máxima  $\bar{G}_k$  nas barras 3 ou 9 quando se adiciona uma terceira unidade geradora ao sistema IEEE-14

	t = 1	t = 2	t = 3
Geração máxima nas barras 3 ou 9 (MW)	10	15	20

## APÊNDICE B. IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES

Serão identificadas as matrizes do sistema de 3 barras apresentado no capítulo 3. As matrizes da restrição  $Fx \leq f$  (8b) são as seguintes:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & \\ & & 1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} \bar{n}_{12} \\ \bar{n}_{13} \\ \bar{n}_{23} \end{bmatrix}$$

Nota-se que, por  $F$  estar associado à variável binária  $x$  que já tem sua dimensão, essa matriz identificada terá o número de colunas correspondente ao número de linhas da variável  $x$ , enquanto o número de linhas está associado à quantidade de restrições do problema que, nesse caso, pode ser representado por  $(nr)$ . Assim,  $F$  tem dimensão  $(nr) \times (nr.nc)$ , em que  $nr$  é o número de ramos do sistema,  $nb$  é o número de barras e  $nc$  o número de circuitos.  $f$  tem a dimensão da multiplicação entre as matrizes  $F$  e  $x$ .

A matriz  $I_u$  referente a restrição  $I_u y = d$  é a seguinte:

$$I_u = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & & & & & -1 & -1 & & -1 & -1 & & -1 & -1 & \\ & 1 & & & 1 & & & & 1 & & -1 & 1 & & -1 & 1 & & -1 \\ & & 1 & & & 1 & & & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O número de linhas corresponde ao número de barras do sistema e o número de colunas corresponde ao número de linhas da variável  $y$ .

As matrizes da restrição  $Hy \leq h$  são as seguintes:

H=	1																		
		1																	
			1																
	-1																		
		-1																	
			-1																
				1															
					1														
						1													
			-1																
				-1															
					-1														
						1													
							1												
								1											
					-1														
							-1												
								-1											
									-1										
																1			
																	1		
																		1	
																-1			
																	-1		
																		-1	
																			-1
							$b_{012}n_{012}$	$-b_{012}n_{012}$								1			
							$b_{013}n_{013}$		$-b_{013}n_{013}$								1		
								$b_{023}n_{023}$	$-b_{023}n_{023}$									1	
							$-b_{012}n_{012}$	$b_{012}n_{012}$								-1			
							$-b_{013}n_{013}$		$b_{013}n_{013}$								-1		
								$-b_{023}n_{023}$	$b_{023}n_{023}$									-1	

A matriz  $H$  tem o número de colunas correspondentes à variável  $y$  e o número de linhas está relacionado aos limites de geração, corte de carga, ângulo e fluxo de potência para o caso base. A matriz  $h$  também está relacionada aos limites da matriz  $H$  e, portanto, tem a sua dimensão igual à multiplicação das matrizes  $H$  e  $y$ .

h=	$\bar{G}_1$
	$\bar{G}_2$
	$\bar{G}_3$
	0
	0
	0
	$\bar{R}_1$
	$\bar{R}_2$
	$\bar{R}_3$
	0
	0
	0
	$\bar{\theta}_1$
	$\bar{\theta}_2$
	$\bar{\theta}_3$
	$\bar{\theta}_1$
	$\bar{\theta}_2$
	$\bar{\theta}_3$
	$n_{012}\bar{f}_{012}$
	$n_{013}\bar{f}_{013}$
	$n_{023}\bar{f}_{023}$
	$n_{012}\bar{f}_{012}$
	$n_{013}\bar{f}_{013}$
	$n_{023}\bar{f}_{023}$
	0
	0
	0
	0
	0
	0

As matrizes da restrição  $Ax + By \leq g$  correspondem às equações que dependem tanto da variável contínua  $y$  quanto da variável binária  $x$ . A matriz  $A$  contém os termos binários e seu número de colunas é correspondente à variável  $x$ .

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline M & & & & & \\ \hline & M & & & & \\ \hline & & M & & & \\ \hline & & & M & & \\ \hline & & & & M & \\ \hline & & & & & M \\ \hline M & & & & & \\ \hline & M & & & & \\ \hline & & M & & & \\ \hline & & & M & & \\ \hline & & & & M & \\ \hline & & & & & M \\ \hline -\bar{f}_{12} & & & & & \\ \hline & -\bar{f}_{13} & & & & \\ \hline & & -\bar{f}_{23} & & & \\ \hline & & & -\bar{f}_{12} & & \\ \hline & & & & -\bar{f}_{13} & \\ \hline & & & & & -\bar{f}_{23} \\ \hline -\bar{f}_{12} & & & & & \\ \hline & -\bar{f}_{13} & & & & \\ \hline & & -\bar{f}_{23} & & & \\ \hline & & & -\bar{f}_{12} & & \\ \hline & & & & -\bar{f}_{13} & \\ \hline & & & & & -\bar{f}_{23} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

A matriz  $B$  contém os termos contínuos e seu número de colunas é correspondente à variável  $y$ . O número de linhas das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $g$  correspondem às equações do modelo que possuem termos binários e contínuos.

B =

							1	-1		$-re_{12}$								
							1		-1		$-re_{13}$							
								1	-1			$-re_{23}$						
							1	-1					$-re_{12}$					
							1		-1					$-re_{13}$				
								1	-1						$-re_{23}$			
							1	-1		$re_{12}$								
							1		-1		$re_{13}$							
								1	-1			$re_{23}$						
							1	-1					$re_{12}$					
							1		-1					$re_{13}$				
								1	-1						$re_{23}$			
										1								
											1							
												1						
													1					
														1				
															1			
										-1								
											-1							
												-1						
													-1					
														-1				
															-1			
																-1		



g=	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	<i>M</i>
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0
	0

## APÊNDICE C. CÓDIGO COMPUTACIONAL

Código para o modelo de otimização robusta do sistema Garver de 6 barras para o programa computacional *GAMS*.

```
Sets
k barras /1*6/
km corredor /12,14,15,23,24,26,35,46/
t tempo /1*3/
y circuitos adicionados /1*4/
nci /1*6/
set1 4*nc*nci /1*128/
set2 3nb+nc*nci+nc /1*58/
set3 6nb+4nc /1*68/
set4 /1*8/;
```

```

parameter B(set1,set2);
parameter A(set1,km,y);
parameter FF(set4,km,y);
parameter HH(set3,set2);
parameter Iu(k,set2);
parameter f(set4,t);
parameter g(set1);
parameter dnom(k,t);
parameter h(set3,t)
parameter desv(k,t);
;

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=B rng=B!A1 rdim=1 cdim=1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load B
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=A rng=A!A1 rdim=1 cdim=2
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load A
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=FF rng=FF!A1 rdim=1 cdim=2
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load FF
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=HH rng=HH!A1 rdim=1 cdim=1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load HH
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=Iu rng=Iu!A1 rdim=1 cdim=1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load Iu
$gdxin

```

```

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=h rng=h!A1 rdim=1 cdim =1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load h
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=g rng=g!A1 rdim=1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load g
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=dnom rng=d!A1 rdim=1
cdim=1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load dnom
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=f rng=f!A1 rdim=1 cdim=1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load f
$gdxin

$CALL GDXXRW.EXE dados_matriz62.xlsx trace=3 par=desv rng=desv!A1 rdim=1
cdim=1
$gdxin dados_matriz62.gdx
$load desv
$gdxin

*display B,A,HH,FF,Iu,f,g,d,h;
parameter deltappi(t) fator de valor presente para investimento
/
1 1
2 .9091
3 .8264
/;

```

```

parameter deltapvo(t) fator de valor presente para operação
/
1 1
2 .9091
3 .8264
/;

table Cadd(km,t) custo de adicionar um circuito ao corredor km
      1      2      3
12    5      5.1    5.22
14    6      6.3    6.62
15    3      3.15    3.31
23    2.8    2.9    2.95
24    4      4.2    4.41
26    3.8    3.95    4.05
35    2.7    2.85    2.95
46    3.5    3.55    3.6
;
;
parameter
bt(set2) custo de operacao em cada barra k
/1 4.2, 6 4.2, 7 420000, 9 420000, 10 420000, 11 420000/ ;

*-----
--
*
Subproblem
*-----
--

binary variables bin(km,y,t),w(km,y,t) variaveis binarias de adicao de
circuito;

positive variables

phi(set3,t) variavel dual
lambda(set1,t) variavel dual
d(k,t) variavel dual
;

```

```

variables
eta(k,t) variavel dual
z
;

equations
subobjetivo
subconstraint(set2,t)
;

subobjetivo .. =e= sum(t, (sum(set1, lambda(set1,t) * (sum((km,y), A(set1,km,y) *
bin.l(km,y,t)) - g(set1))) - sum(set3, phi(set3,t) * h(set3,t)) +
sum(k, eta(k,t) * d.l(k,t))));

subconstraint(set2,t) .. (sum(set1, -lambda(set1,t) * B(set1, set2)) +
sum(set3, -phi(set3,t) * HH(set3, set2)) + sum(k, eta(k,t) * Iu(k, set2)))
=e= bt(set2) * deltavpo(t);

model subproblem /subobjetivo, subconstraint/;

subproblem.solprint=2;
subproblem.solve link=2;

*-----
----
*
*                      Linearizacao do termo bilinear
*-----
----

set
iterj 'max Benders iterations' /iterj1*iterj50/;

set linset(iterj) 'dynamic set';
linset(iterj)=no;

parameters
linconst(iterj,t) constant term in linearization

```

```

lincoeffn(iterj,k,t) ncoeff
lincoeffd(iterj,k,t) d coefficient;
scalar delta /1/;

variable U;
positive variables
epsilon(k)
epsn_p(k)
epsn_n(k)
beta(t);

equations
oaobjm OA objective
lin(iterj,t) linearization
oasubconstraint(set2,t)

sabs(k,t)
infd(k,t)
supd(k,t)
;

oaobjm .. U =e= sum(t, (sum(set1, lambda(set1,t)*(sum((km,y),A(set1,km,y)*
bin.l(km,y,t))-g(set1))) - sum(set3,phi(set3,t)*h(set3,t))+beta(t)));

lin(linset,t) .. beta(t) =l= sum(k,eta.l(k,t)*d.l(k,t) + (eta(k,t)
-eta.l(k,t))*d.l(k,t) + (d(k,t)-d.l(k,t))*eta.l(k,t));

oasubconstraint(set2,t) .. (sum(set1,-lambda(set1,t)*B(set1,set2)) +
sum(set3,-phi(set3,t)*HH(set3,set2)) + sum(k,eta(k,t)*Iu(k,set2)))
=e= bt(set2)*deltavpo(t);

sabs(k,t) .. (d(k,t)- dnom(k,t))/desv(k,t)=l=delta;
infd(k,t) .. dnom(k,t) -desv(k,t) =l= d(k,t);
supd(k,t) .. dnom(k,t) + desv(k,t) =g= d(k,t);

model OAmaster / oaobjm,lin,oasubconstraint,sabs,

```

```

infd,supd/;

OAmaster.solprint=2;
OAmaster.solvelink=2;

*-----
---
*
*                      Master Problem
*-----
---
set
iter 'max Benders iterations' /iter1*iter50/
;

set cutset(iter) 'dynamic set';
cutset(iter)=no;

variables
zmaster 'objective variable of master problem'
alpha(t)
;

parameter
cutconst(iter,t) 'constants in optimality cuts'
cutcoeff(iter,km,y,t) 'coeff in cuts'
;

equation
masterobj 'master objective function' ;
masterobj..  zmaster =e= sum(t,deltavpi(t)*sum((km,y),Cadd(km,t)*w(km,y,t))
+
alpha(t)) ; ;

equation
cut(iter,t) 'Benders optimality cuts' ;
cut(cutset,t).. alpha(t) =g= sum((km,y),cutcoeff(cutset,km,y,t)*bin(km,y,t))
+
cutconst(cutset,t);

```

```

equation
bconstraint(set4,t) 'Binary constraint';
bconstraint(set4,t) .. sum((km,y),FF(set4,km,y)*w(km,y,t)) =l=f(set4,t);

equation
uso(km,y,t) faz com que o uso seja feito após a instalação;
uso(km,y,t) .. bin(km,y,t)=e=w(km,y,t)+w(km,y,t-1)+w(km,y,t-2);

equation
ordem(km,y,t) inclui ordem de adição nas alternativas;
ordem(km,y,t) .. bin(km,y,t) =g= bin(km,y+1,t);

equation
ad(km,y) evita que o investimento seja adicionado mais de uma vez;
ad(km,y) .. sum(t,w(km,y,t)) =l= 1;

equation
soma(t) ;
soma(t) .. sum((km,y),w(km,y,t))=g=1;

model masterproblem /masterobj, cut,bconstraint, uso,ordem ,ad/;
* reduce output to listing file:
masterproblem.solprint=2;
* speed up by keeping GAMS in memory:
masterproblem.solveLink=2;
* solve to optimality
masterproblem.optcr=0;

scalar UB 'upperbound' /INF/;
scalar LB 'lowerbound' /-INF/;
bin.l(km,y,t)=1;
w.l(km,y,t)=1;
d.l(k,t) = dnom(k,t);
*-----
* Benders Algorithm

```



```

*-----
scalar converged /0/;
scalar iteration;
scalar bound;
parameter wbest(km,y,t);
parameter log(iter,*) 'logging info';

scalar boundinf;
parameter logi(iterj,*) 'logging info';
scalar converged_i /0/;
scalar UOA 'upperbound' /INF/;
scalar LOA 'lowerbound' /-INF/;
scalar bound_i;

loop(iter$(not converged),
*
* solve Benders subproblem
*
*display bin.l;

loop(iterj$(not converged_i),

*solve OA subproblem S(x,d)
solve subproblem maximizing z using lp;

bound_i = z.l;

if (bound_i > LOA,
LOA = bound_i;
);

linset(iterj) = yes;

linconst(iterj,t) = -sum(k,d.l(k,t)*eta.l(k,t));
lincoeffn(iterj,k,t)= d.l(k,t);

```

```

lincoeffd(iterj,k,t) = eta.l(k,t);

*-----OA master prob-----
---

solve OAmaster maximizing U using lp;

UOA = U.l;
*display LOA,UOA;
logi(iterj,"LOA") = LOA;
logi(iterj,"UOA") = UOA;
convergedi$( (UOA-LOA) < 0.01 ) = 1;
);
display z.l;
display logi, d.l;
convergedi= 0;
UOA = INF;
LOA =-INF;

bound = sum(t,deltavpi(t)*sum((km,y),Cadd(km,t)*w.l(km,y,t))) + z.l;

if (bound < UB,
UB = bound;
*wbest(km,y,t) = bin.l(km,y);

);
*display UB, bound;
cutset(iter) = yes;

*cutdata
cutconst(iter,t) = -sum(set1,lambda.l(set1,t)*g(set1))
- sum(set3, phi.l(set3,t)*h(set3,t)) + sum(k,eta.l(k,t)*d.l(k,t)) ;
cutcoeff(iter, km,y,t) = sum(set1,lambda.l(set1,t)*A(set1,km,y));
*
* solve Relaxed Master Problem

```

```

*
*option optcr=0;
solve masterproblem minimizing zmaster using mip;

*
* check results.
*
abort$(masterproblem.modelstat=4) "Relaxed Master is infeasible";
abort$(masterproblem.modelstat>=2) "Masterproblem not solved to optimality";
*display zmaster.l,alpha.l;
*
* update lowerbound
*
LB = zmaster.l;
*display UB, LB, bin.l, w.l;

log(iter, "LB") = LB;
log(iter, "UB") = UB;
*log(iter, "cutconst")= cutconst(iter,t);
iteration = ord(iter);
*display LB, UB, iteration, cutset, cutconst, w.l;
converged$( (UB-LB) < 0.1 ) = 1;
display$converged "Converged";
);
display log;
abort$(not converged) "No convergence";
display "Benders solution", alpha.l, phi.l, eta.l, lambda.l,
subconstraint.m, bin.l, w.l, d.l;

scalar c_inv;
scalar c_uso;
c_inv = sum(t, deltavpi(t)*sum(km, Cadd(km,t)*sum(y, w.l(km,y,t))));
c_uso = sum(t, deltavpi(t)*sum(set2, bt(set2)*subconstraint.m(set2,t)));
display c_inv, c_uso;

```

```
*$ontext
execute_unload "results_6b_inc.gdx"  subconstraint.M log w.l d.l
*execute 'gdxxrw.exe results05.gdx var=nad.l'
execute 'gdxxrw.exe results_6b_inc.gdx equ=subconstraint.M rng=D!'
execute 'gdxxrw.exe results_6b_inc.gdx par=log rng=log!'
execute 'gdxxrw.exe results_6b_inc.gdx var=w.l rng=w!'
execute 'gdxxrw.exe results_6b_inc.gdx var=d.l rng=dd!'
*execute 'gdxxrw.exe results.gdx var=ce.l'
*execute 'gdxxrw.exe results.gdx var=x.M rng=NewSheet!f1:i4'
*$offtext
```